

Università degli Studi di Bologna

---

---

FACOLTA' DI INGEGNERIA  
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica  
Applicazioni di Intelligenza Artificiale L-S

INCERTEZZA DELLA DOMANDA NELLE  
CATENE DI SUPPORTO:  
TECNICHE DI RIDUZIONE DINAMICA DELLO  
SPAZIO DI RICERCA PER UN MODELLO CP

*Tesi di Laurea di:*  
Roberto Rossi

*Relatore:*  
Prof. Michela Milano

*Correlatori:*  
Armagan Tarim  
Brahim Hnich

---

Anno Accademico 2004 – 2005

**Parole chiave:**

catene di supporto  
incertezza della domanda  
controllo delle scorte  
programmazione a vincoli  
vincoli globali

## ***Introduzione***

Il problema del cosiddetto *lotto economico* consiste nella gestione ottima delle scorte per soddisfare la domanda dei clienti nella vendita di prodotti, sotto il vincolo di minimizzare i costi di acquisto e stoccaggio delle merci. Esso costituisce una delle sfide principali per le grandi aziende impegnate nella distribuzione o nella produzione di beni di consumo: interpretare il mercato, saper prevedere il comportamento dei clienti e ottimizzare di conseguenza la propria produzione o il proprio inventario sono questioni complesse e al contempo basilari per le compagnie; un drastico calo nelle richieste di merci non opportunamente previsto e gestito infatti, potrebbe far lievitare i costi di magazzino, mentre qualora si andasse sotto scorta si avrebbero mancati guadagni e soprattutto si perderebbe credibilità verso i clienti. Modellare un tale sistema per effettuare previsioni e pianificazioni non costituisce certo un facile compito per le divisioni aziendali dedicate: servono ingenti sforzi per coordinare i vari soggetti che devono cooperare per garantire il massimo risultato in termini di minima spesa per le merci in stock e di miglior soddisfacimento possibile delle richieste dei clienti. Le aziende all'avanguardia nel settore sono spesso dotate di complessi sistemi e divisioni di data mining, che settimanalmente raccolgono informazioni sulle richieste, elaborando previsioni e pianificando le successive produzioni secondo modelli più o meno consolidati. Di fatto la pesante ingerenza di fattori aleatori rende il problema molto complesso; dunque se a partire dagli anni '50 si è iniziato ad approfondire la tematica della gestione ottima di un semplice magazzino in presenza di una domanda deterministica e nota a priori, essenzialmente a scopi militari<sup>1</sup> per coordinare le catene di supporto tra i vari reparti della difesa; già dagli anni '80 si è sentito il bisogno di sviluppare modelli più complessi, in grado di gestire una domanda che, come nella realtà, è fortemente aleatoria, focalizzando soprattutto l'attenzione sul bisogno di garantire livelli di servizio adeguati alle richieste del management. Le prime soluzioni al

---

<sup>1</sup> Le prime ricerche condotte da Wagner e Whitin furono finanziate dalla marina statunitense nel 1958

problema, seppur limitate nella loro capacità di modellazione dei reali sistemi in gioco, necessariamente erano di natura euristica: il modello infatti sebbene fosse di programmazione lineare, richiedeva un numero di variabili e di vincoli troppo elevato per poter essere utilizzato nei solver dell'epoca. Gli stessi Bookbinder e Tan, ovvero i creatori della prima politica per la gestione di domande non deterministiche, alla fine degli anni '80 facevano notare questa estrema complessità computazionale per il modello completo, nonostante si cercasse di modellare il problema per un singolo prodotto, una singola sorgente e un singolo distributore; qualora poi uno di questi termini fosse stato esteso a due o tre soggetti, la complessità sarebbe cresciuta di conseguenza rendendo ancora più inverosimile la possibilità di trovare la politica ottima per istanze non banali del problema. La soluzione da loro proposta è in grado di fornire soluzioni soddisfacenti dal punto di vista della minimizzazione dei costi, in pratica però la scelta da loro effettuata è stata quella di sacrificare l'ottimalità della soluzione per puntare sull'efficienza e sull'effettiva possibilità, in termini computazionali, di effettuare la pianificazione e trovare una buona politica. Tra la fine degli anni '80 e la fine del secolo molti altri studi sono stati condotti per migliorare i modelli preposti alla raccolta dati e all'elaborazione di previsioni, tuttavia per quasi un decennio il modello di Bookbinder e Tan è rimasto lo stato dell'arte per la minimizzazione del valore atteso dei costi per il problema del *lotto economico* in presenza di domande aleatorie e variabili nel tempo. Nei primi anni del nuovo secolo, anche in relazione allo sviluppo di elaboratori con capacità di calcolo sempre maggiori, nuovi progressi sono stati compiuti nella formulazione di modelli e tecniche di risoluzione complete. Tarim e Kingsman nel 2003 hanno proposto un'estensione al modello di Bookbinder e Tan che, sfruttando la programmazione lineare intera mista, riesce a garantire la completezza nella ricerca della soluzione ottima per la stessa politica di gestione delle scorte originariamente proposta da Bookbinder e Tan. Successivamente Tarim e Smith hanno trasformato il modello MIP in un modello CP, diminuendo il numero di vincoli e di variabili coinvolte in modo significativo e rendendo possibile una ricerca esaustiva dello spazio delle soluzioni relativo. Considerazioni sulla struttura del problema hanno poi permesso a Tarim e Smith anche di elaborare

alcune tecniche di riduzione a priori per tale spazio di ricerca, in modo da rendere più efficiente l'esplorazione dell'albero decisionale per la ricerca della soluzione ottima. In questo lavoro viene presentata un'estensione proposta per le tecniche di riduzione sviluppate da Tarim e Smith. Partendo dalle considerazioni strutturali da loro suggerite per la riduzione a priori dei domini delle variabili decisionali, sono state sviluppate delle nuove tecniche che poggiano sulle precedenti, ma che rendono possibile una riduzione dinamica dei domini durante la ricerca, in modo da sfruttare le informazioni legate alla soluzione parziale relativa ad un certo nodo dell'albero decisionale. Sono stati in particolare sviluppati due metodi di riduzione sotto forma di vincoli globali per il problema CP, che possono essere usati per migliorare drasticamente l'efficienza della ricerca. Un terzo vincolo globale, sfrutta invece un rilassamento del problema CP originale, risolvibile in tempo polinomiale, rendendo possibile una ricerca di tipo *relax and bound*; quest'ultima tecnica in particolare, ha prodotto l'incremento più notevole in termini di prestazioni. Rispetto al lavoro di Tarim e Smith si è poi proposta una diversa euristica per la selezione delle variabili decisionali per il *branching*; anche questa modifica ha portato notevoli miglioramenti nelle prestazioni, che risultano evidenti dai test effettuati. Il lavoro svolto ha comportato la modellazione del problema CP utilizzando un solver open source in java, nonché l'estensione del set di vincoli di base mediante l'aggiunta dei nuovi vincoli globali necessari per modellare le nuove tecniche proposte. Mediante l'analisi dei risultati ottenuti è stato possibile valutare l'efficacia delle tecniche di riduzione anche in relazione alle diverse tipologie di istanze trattate. In particolare si è osservato che, sebbene i parametri del modello influenzino in modo critico le prestazioni, nella maggior parte dei casi i test effettuati hanno mostrato l'estrema efficacia delle nuove tecniche di riduzione proposte, che anche per le istanze più sfavorevoli, dove cioè la riduzione e il *bounding* risultano meno efficaci, riducono di vari ordini di grandezza il numero di nodi esplorato e il tempo impiegato per effettuare la ricerca rispetto ai risultati ottenuti con la sola riduzione a priori proposta da Tarim e Smith.

## ***La teoria delle scorte***

Il problema di definire la politica ottima per il problema del lotto economico di un singolo prodotto nell'ipotesi di domande stocastiche su intervalli discreti e di un orizzonte temporale finito si inserisce nel più vasto scenario della teoria delle scorte. Ci sono molteplici ragioni per cui un'azienda solitamente è indotta ad accumulare scorte di beni. Recentemente i successi di Amazon [KKS00, p.110] o di altre compagnie .com come la Dell [KKS00, p. 197] hanno portato un forte entusiasmo verso le cosiddette strategie "just in time", ovvero verso tutte quelle forme di gestione minimale del magazzino, volte a ridurre il più possibile i costi di stoccaggio e a rendere più "nervosa" la domanda di beni da parte del distributore nei confronti del produttore: si tende ad ordinare un bene solo quando si ha già un cliente a cui venderlo e si organizzano gli ordini sulla base dell'esperienza acquisita. Tale approccio presenta vantaggi, ma anche ovvi problemi: difficilmente una strategia siffatta riuscirà a sfruttare vantaggi legati ad economie di scala; tipicamente infatti gli ordini sono frequenti e di piccola entità, dunque i costi fissi non sono ammortizzati a dovere. Sono state dunque adottate dalle aziende soluzioni e strategie differenti per far fronte ai problemi legati ai costi fissi, ad esempio accordi di lungo periodo con i produttori di componentistica (Dell – Intel) in modo da ottenere bassi costi fissi a fronte di ordini frequenti; in ogni caso restano comunque varie voci di spesa che non possono essere facilmente ammortizzate in scenari JIT: se vengono fatti ordini frequenti e se il trasporto avviene su gomma, ovviamente il prezzo del carburante inciderà in modo significativo sui costi, dunque risulterebbe in ogni caso più conveniente accorpare gli ordini cercando di diminuire l'incidenza dei costi fissi legati a questi ultimi. Sebbene quindi in alcuni casi la strategia JIT si sia rivelata vincente, specie negli ambiti più vicini alle nuove tecnologie, il problema del corretto dimensionamento dei lotti di produzione rimane comunque aperto e significativo in molti altri campi: edilizia, alimentari etc.

Come accennato, le ragioni per accumulare scorte sono molteplici:

- La fluttuazione della domanda: nel campo della componentistica elettronica è significativo il caso citato da Davis (1993) dove uno studio

condotto dalla Hewlett-Packard ha rivelato che il 60% degli investimenti impegnati nel sistema di produzione e distribuzione sono attribuibili ad incertezza della domanda da parte del mercato.

- L'andamento dei prezzi delle merci
- Le economie di scala che si ottengono producendo o acquistando lotti di più grandi dimensioni
- L'incertezza in cui opera un sistema

Nella determinazione del costo di una politica di gestione intervengono varie componenti:

1. *costo d'approvvigionamento*: comprende una quota fissa,  $k$ , detta *costo di ordinativo* (o: *costo fisso di produzione*, a seconda che il bene sia acquistato o prodotto dall'azienda) e una variabile,  $C(Q)$ , legata alla quantità  $Q$  di merce acquistata o prodotta, per cui il costo d'approvvigionamento di un lotto  $Q$  è dato da:  $k + C(Q)$
2. *costo di immagazzinamento* (dovuto al deterioramento del bene, all'affitto dei locali, agli stipendi del personale, al mancato profitto legato all'immobilizzazione del capitale,...); può in genere ritenersi proporzionale all'ammontare delle scorte. Pertanto, se  $h$  è il costo di immagazzinamento di un'unità di merce in giacenza per un'unità di tempo,  $I$  è il livello medio delle scorte e  $T$  è il periodo considerato, il costo di immagazzinamento è dato da:  $h \cdot I \cdot T$
3. *costo di rottura*: misura la perdita subita quando non si può soddisfare una domanda (infatti, si ha una perdita di profitto se la domanda si rivolge altrove; se il cliente è disposto ad aspettare, si ha comunque una perdita di credibilità; oppure, secondo il contratto, non si perde l'ordinazione ma si paga una penalità); nell'ipotesi più semplice sarà proporzionale alla quantità di domanda non soddisfatta, secondo un coefficiente  $l$  che indica la perdita imputabile ad un'unità di domanda non soddisfatta.

determinare il livello ottimale di scorte significa determinare la quantità di merce da conservare in magazzino in modo da minimizzare la somma di questi costi.

### **Il modello deterministico del lotto economico (EOQ) in presenza di una domanda statica**

[KKS00, p. 43] È il più semplice e costituisce la base di partenza per la comprensione di qualsiasi altro modello. Formulato da Ford W. Harris nei primi anni del secolo, si basa sulle seguenti ipotesi:

- assenza assoluta d'incertezza: la *domanda* (futura) è supposta nota ed il tasso con cui si manifesterà è supposto costante e uguale a  $d$ .
- $q(t)$  è il livello di scorte,  $q_0$  è il livello iniziale

$$q(t) = q_0 - dt \quad (1)$$

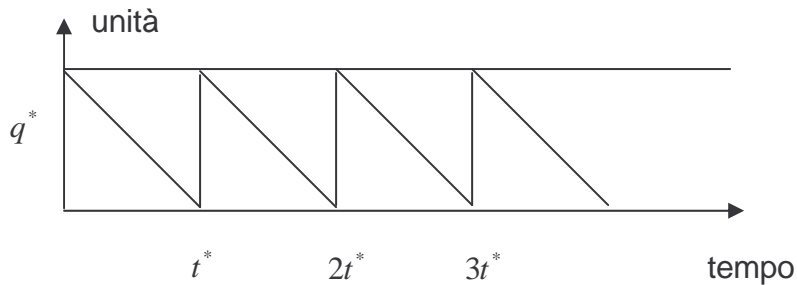
- non sono ammesse rotture di stock, cioè situazioni in cui non si può far fronte alla domanda, dunque si esegue un ordine quando  $q(t) = 0$ , cioè all'istante  $t = \frac{q_0}{d}$
- Il tempo di attesa per l'arrivo della merce dopo che un ordine è stato eseguito si suppone nullo

*Costi:*

$c$	costo di acquisto unitario
$k$	costo fisso di produzione (indipendente dalla merce acquistata)
$h$	costo di giacenza unitario
$C_p(q) = cq + k$	costo di produzione
$C_g(q) = \int_0^{\frac{q}{d}} q(t) dt = \frac{hq^2}{2d}$	costo di giacenza



Soluzione per il modello deterministico del lotto economico in presenza di una domanda statica:

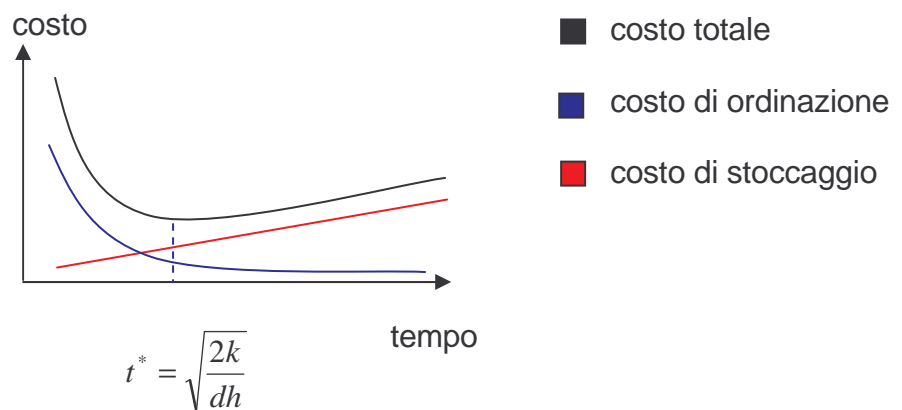


$$C = C_p(q) + C_g(q) = cq + k + \frac{hq^2}{2d} \quad (\text{costo totale}) \quad (2)$$

nell'intervallo  $[0, \frac{q}{d}]$  (unità di tempo in assenza di rotture)

annullando la derivata prima otteniamo il valore ottimo di  $q^* = \sqrt{\frac{2dk}{h}}$  (3)

e il tempo ottimo di riordino  $t^* = \sqrt{\frac{2k}{dh}}$  (4)



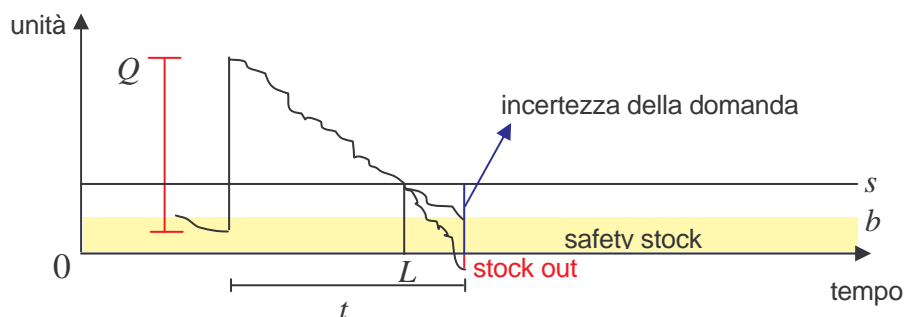
Tale metodo di risoluzione è ben noto sotto il nome di formula della radice quadrata per EOQ, si basa sull'idea di bilanciare i costi di stoccaggio e i costi di ordinazione per ottenere una politica ottima.

## Il modello stocastico del lotto economico in presenza di una domanda statica

Il modello presentato illustra la tecnica per bilanciare costi di stoccaggio e costi di ordinazione minimizzando il costo totale, tuttavia esso non tiene conto di importanti fattori quali l'incertezza della domanda e delle fluttuazioni dei costi. Di fatto molte compagnie nel mondo basano le loro strategie su previsioni a breve e medio termine riguardanti l'andamento del mercato, tipicamente tali previsioni vengono effettuate sulla base dei trend storici e quindi sull'esperienza pregressa; oggi lo sviluppo tecnologico ha reso i mercati sempre più difficili da "interpretare" sulla base delle conoscenze acquisite, i prodotti hanno spesso un ciclo di vita breve e l'incertezza della domanda è tipicamente elevata.

Sotto queste premesse:

- Il tasso di domanda è una v.a.  $d$  con media  $\bar{d}$  e funzione densità di probabilità  $\varphi_d(\xi)$
- $\varphi_d(\xi)$  può essere una funzione continua o discreta
- $\varphi_d(\xi)$  è definita per  $\xi > 0$
- tramite la  $\varphi_d(\xi)$  otteniamo la funzione di distribuzione cumulativa  $\Phi_d(\xi)$
- il valore atteso della domanda dunque sarà:  $\bar{d} = \int_0^{\infty} \varphi_d(\xi) d\xi$
- sia  $L$  il tempo necessario per ricevere le merci in seguito ad un ordine



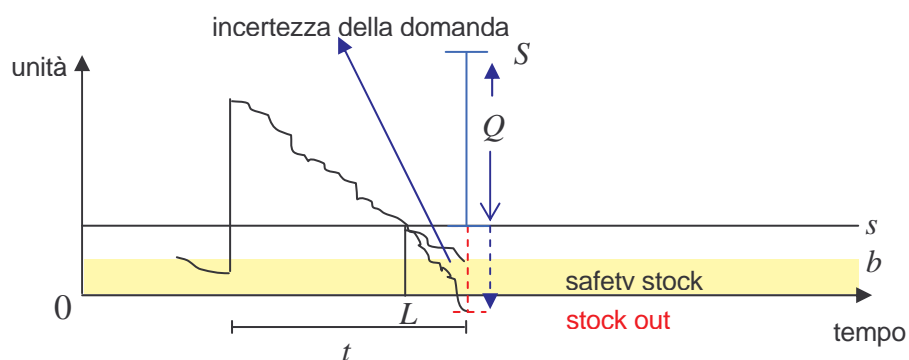
ovviamente non possiamo escludere l'eventualità di andare sotto scorta con queste ipotesi, dunque introdurremo la nozione di stock di sicurezza e assumeremo un certo livello di servizio desiderato nel nostro modello, ciò significa incorrere nell'evento "scorte esaurite" con una certa probabilità: tipicamente si richiederanno alti livelli di servizio (es. 95%) in modo che tale probabilità sia bassa; un'altra soluzione solitamente adottata, ma non descritta nel seguito è quella di assegnare dei costi di penalizzazione nel caso in cui si esauriscano le scorte.

Nella formulazione scelta dunque la dimensione dello stock di sicurezza dipende dal livello di servizio richiesto:

$$b = z \cdot \sigma_L \quad (5)$$

dove  $z$  è il coefficiente di deviazione standard per il livello di servizio richiesto,  $\sigma_L$  è la deviazione standard della domanda nell'intervallo di arrivo delle merci.

In questo caso la politica migliore da adottare è chiamata politica  $(s, S)$ . In tale politica non si indica più la quantità  $Q$  di merci da ordinare come nel caso precedente, ma, assieme al livello di scorte minimo  $s$  che impone un riordino, la quantità  $S$  che si desidera avere in stock in seguito all'ordine.  $Q$  quindi diventa di fatto un valore che è stabilito in funzione della domanda che si è effettivamente realizzata.



La quantità  $S$  può essere calcolata in questo caso seguendo la logica già illustrata per EOQ nel caso deterministico, dunque usando la nota formula della radice quadrata: partendo dalla definizione di  $Q$  in tale formula, dal momento che

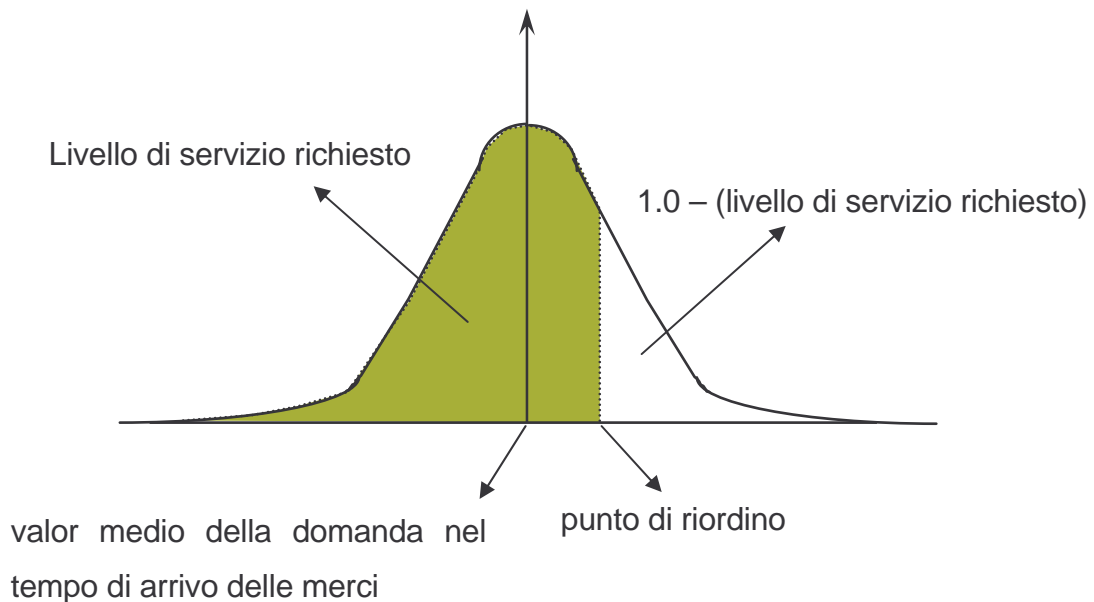
c'è una certa variazione della domanda abbiamo bisogno di mantenere il buffer di sicurezza già descritto, dunque il valore di  $S$  (*order-up-to-level*, cioè il livello a cui portare le scorte in seguito all'ordine) può essere espresso come:

$$S = \max\{Q, L \cdot \bar{d}\} + z \cdot \sigma_L \quad (6)$$

il punto di riordino invece è definito come:

$$s = \bar{d} \cdot L + z \cdot \sigma_L \quad (7)$$

ovvero è pari alla somma tra il valor medio della domanda per unità di tempo moltiplicato per i periodi richiesti per la consegna e il buffer di sicurezza per il livello di servizio richiesto.



Entrambi tali modelli, quello deterministico e quello stocastico presentano dei limiti, infatti non consentono di:

1. esprimere il costo di una spedizione in funzione della quantità del rifornimento e/o della distanza del fornitore
2. esprimere l'effetto sui costi di giacenza di variazioni del valore delle risorse nel tempo
3. tenere conto di un andamento irregolare dell'assorbimento di risorse dovuto ad esempio a variazioni della domanda da parte del mercato

## **Il problema del lotto economico in presenza di una domanda dinamica e deterministica**

Un'estensione al problema EOQ di base presentato è stata proposta da Wagner and Whitin in [WW58], tale formulazione permette di rilassare l'assunzione secondo cui la domanda è considerata statica; dunque nel modello da loro presentato è possibile avere domande differenti nei vari periodi presi in considerazione nel problema. Wagner e Whitin osservano come la formula della radice quadrata non sia efficace nel caso in cui si consideri un modello dinamico: ad esempio quando i costi di stoccaggio o i costi fissi sono variabili nei vari periodi presi in considerazione; sotto queste condizioni essa infatti non assicura più una soluzione a costo minimo. In [WW58] è presentato un algoritmo di programmazione dinamica [B57] che risolve la versione dinamica di EOQ. Il modello matematico adottato in [WW58] è tempo discreto ad orizzonte finito e ipotizza costi di acquisto e di vendita costanti nel tempo, dunque solo i costi di stoccaggio diventano rilevanti nella definizione della politica ottima. Nel modello presentato per  $t = 1, 2, \dots, N$  troviamo:

$d_t$  = entità della domanda

$i_t$  = costo di stoccaggio per merci tenute in magazzino fino a  $t + 1$

$s_t$  = costo fisso per ordinazione

$x_t$  = entità dell'ordine

Domande e costi sono per definizione non negativi per tutti i periodi presi in considerazione. Il problema vuole trovare una politica ottima  $x_t \geq 0, t = 1, 2, \dots, N$  tale che tutte le domande siano soddisfatte con un costo complessivo minimo, non è detto che tale politica sia unica. Ovviamente tale problema può essere risolto per enumerazione, considerando le  $2^{N-1}$  possibili combinazioni riguardanti la scelta di ordinare o meno delle merci in un dato periodo. Più efficiente è tuttavia l'approccio presentato basato sulla programmazione dinamica.

Ci sono due concetti fondamentali alla base di ogni algoritmo di programmazione dinamica: in primo luogo sfruttare la memoria per non ripetere gli stessi calcoli più volte: DP è infatti definita pseudo-polinomiale proprio perché l'occupazione di memoria diventa il fattore critico; in secondo luogo è basilare individuare uno schema di ricorsione adeguato per il problema considerato, in modo tale da permettere all'algoritmo di risolvere ad ogni passo un sottoproblema differente, memorizzarne la soluzione ed eventualmente riutilizzarla se necessario nei passi successivi evitando di calcolarla nuovamente.

Il modello di Wagner e Whitin prevede che non ci siano rotture, quindi posto  $I_0$  il valore iniziale delle scorte e  $I$  il valore delle scorte all'inizio di un certo periodo abbiamo:

$$I = I_0 + \sum_{j=1}^{t-1} x_j - \sum_{j=1}^{t-1} d_j \geq 0 \quad (8)$$

possiamo quindi scrivere l'equazione funzionale [B57] che rappresenta la politica a costo minimo per i periodi  $[t..N]$ , fissato  $I$  come valore delle scorte in entrata per un certo periodo:

$$f_t(I) = \min_{\substack{x_t \geq 0 \\ I+x_t \geq d}} [i_{t-1}I + \delta(x_t)s_t + f_{t+1}(I + x_t - d_t)] \quad (9)$$

dove

$$\delta(x_t) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_t = 0 \\ 1 & \text{if } x_t > 0 \end{cases} \quad (10)$$

nel periodo  $N$  abbiamo:

$$f_N(I) = \min_{\substack{x_N \geq 0 \\ I+x_N \geq d}} [i_{N-1}I + \delta(x_N)s_N] \quad (11)$$

Possiamo quindi calcolare  $f_t$  partendo da  $t = N_t$  come funzione di  $I$  fino ad ottenere  $f_1$  ottenendo la soluzione ottima nel momento in cui viene trovato  $I$  per il periodo 1.

La versione base qui enunciata per la programmazione dinamica viene poi estesa in [WW58] per mezzo di alcuni teoremi:

1. Esiste una politica ottima tale che  $I \cdot x_t = 0$  per ogni  $t$  (dove  $I$  sono le scorte portate in  $t$  dai periodi precedenti)
2. Esiste una politica ottima tale che per ogni  $t$

$$x_t = 0 \quad \text{oppure} \quad x_t = \sum_{j=t}^k d_j \quad \text{per alcuni} \quad k, t \leq k \leq N$$

3. Esiste una politica ottima tale che se  $d_{t^*}$  è soddisfatta da alcuni

$$x_{t^{**}}, t^{**} < t^*, \quad \text{allora} \quad d_t, \quad t = t^{**} + 1, \dots, t^* - 1, \quad \text{è anch'essa soddisfatta da} \quad x_{t^{**}}$$

4. Posto che  $I = 0$  per il periodo  $t$ , è possibile considerare i periodi da 1 a  $t - 1$  separatamente nella determinazione della politica ottima.

attraverso alcune proprietà del modello gli autori formulano un'equazione funzionale differente, che potenzialmente è in grado di richiedere meno periodi per giungere alla soluzione ottima. L'idea che i quattro teoremi enunciati supportano consiste nell'individuare dei sottoproblemi indipendenti all'interno del macro intervallo  $[1..N]$ , in particolare il *teorema 4* indica le condizioni secondo cui un sottoproblema  $[1..t]$  può essere considerato indipendente.

Viene quindi enunciata una formulazione alternativa per l'equazione funzionale in seguito all'introduzione dei nuovi teoremi: sia  $F(t)$  il costo minimo di un programma per i periodi  $[1..t]$  allora:

$$F(t) = \min \left[ \min_{1 \leq j < t} \left[ s_j + \sum_{h=j}^{t-1} \sum_{k=h+1}^t i_h d_k + F(j-1) \right], s_t + F(t-1) \right] \quad (12)$$

dove  $F(0) = 0$  ed  $F(1) = s_1$ . Ciò significa che il costo minimo per i primi  $t$  periodi comprende un costo fisso di ordine al periodo  $j$ , più la somma dei costi di

stoccaggio per soddisfare la domanda  $d_k$  con  $k = j+1, \dots, t$  portando avanti scorte a partire dal periodo  $j$ , più il costo di una politica ottima per i periodi da 1 a  $j-1$  (presi come un sottoproblema indipendente); i teoremi enunciati in [WW58] garantiscono che sarà possibile trovare un  $j$  per il quale esiste una tale politica ottima. Con tale formulazione si parte dal periodo 1 e si prosegue fino a trovare una soluzione ottima dopo aver derivato  $F(N)$  all'ultimo passo di ricorsione. Da notare che con tale formulazione, in ogni periodo  $t$ , solo  $t$  differenti politiche dovranno essere considerate dall'algoritmo. Il minimo in (12) può non essere unico, dunque possono esistere più soluzioni ottime.

L'ultima estensione introdotta è infine il teorema dell'orizzonte di pianificazione (*Planning Horizon Theorem*), dove si stabilisce che se per un certo  $t'$  il minimo si riscontra per un dato  $j = t'' \leq t'$  allora per i periodi  $t > t'$  dovremo considerare solo i  $j$  tali che  $t'' \leq j \leq t$ , dunque sarà possibile spostare in avanti l'orizzonte degli eventi in  $t''$  risparmiando iterazioni. In termini di complessità computazionale in assenza di tale ottimizzazione sarà necessaria una tabella con  $\frac{N(N+1)}{2}$  termini (contro le  $2^{N-1}$  possibilità complessive), mentre applicando la tecnica forward all'orizzonte degli eventi tale tabella risulterà di dimensioni tipicamente molto minori o nel caso peggiore comunque pari a  $\frac{N(N+1)}{2}$ .

### *Esempio numerico*

Nella seguente tabella sono riportati i dati per le domande su 12 periodi;  $i_t$  è stata lasciata costante ad 1 per tutti i periodi in modo da semplificare i calcoli.

$t$ (mese)	$d_t$	$s_t$	$i_t$
1	69	85	1
2	29	102	1
3	36	102	1
4	61	101	1
5	61	98	1
6	26	114	1
7	34	105	1
8	67	86	1



9	45	119	1
10	67	110	1
11	79	98	1
12	56	114	1
media	52.5	102.8	1

mentre nella successiva sono indicati i passi dell' algoritmo:

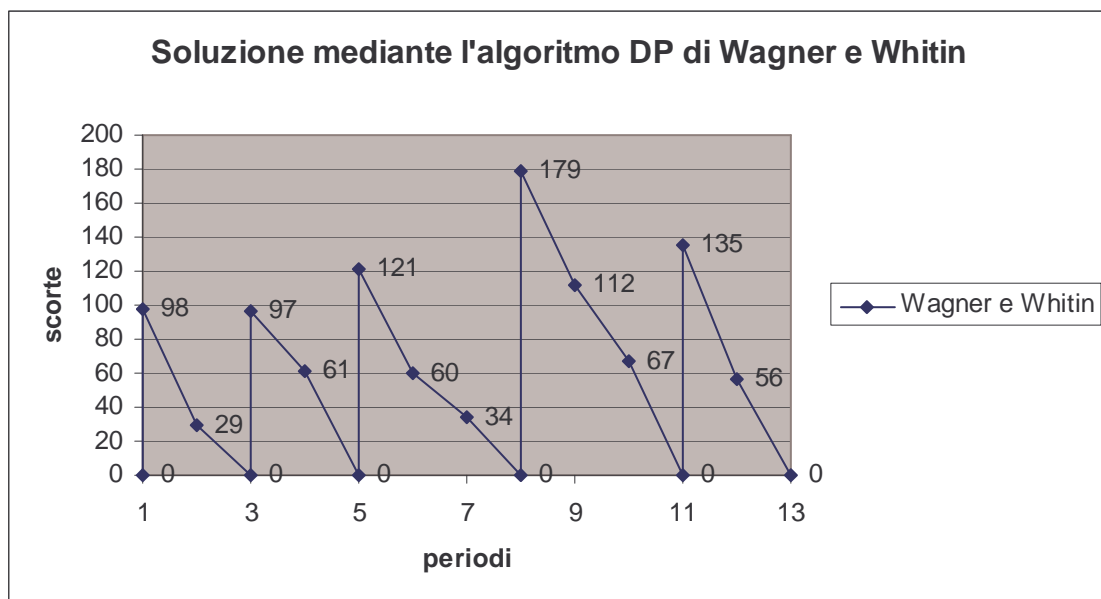
$t$ (mese)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
costo ord.	85	102	102	101	98	114	105	86	119	110	98	114
domanda	69	29	36	61	61	26	34	67	45	67	79	56
	85	187	216	287	375	462	505	555	674	710	808	903
		114	223	277	348	401	496	572	600	741	789	864
			186			400	469			734		901
							502					
min cost.	85	114	186	277	384	400	469	555	600	710	789	864
politica ott. <sup>2</sup>	<u>1</u>	<u>12</u>	<u>123</u>	<u>34</u>	<u>45</u>	<u>456</u>	<u>567</u>	<u>8</u>	<u>89</u>	<u>10</u>	<u>10, 11</u>	<u>11, 12</u>

Per chiarire, la politica ottima per il periodo 1 considerato separatamente consiste nel fissare un ordine (dunque fissiamo anche il costo fisso relativo: 85). Per il periodo 2 dobbiamo considerare due alternative: ordinare nel periodo 2, utilizzando la politica ottima nota per il periodo 1 (ad un costo complessivo di  $102 + 85 = 187$ ); oppure ordinare nel periodo 1 per soddisfare la domanda anche relativamente al periodo 2 (ad un costo  $85 + 29 = 114$ ). La politica ottima è ovviamente la seconda. Nel periodo 3 ci sono tre alternative: ordinare nel periodo 3, utilizzando la politica ottima per i periodi 1 e 2 considerati separatamente (ad un costo  $102 + 114 = 216$ ); oppure ordinare nel periodo 2 per soddisfare la domanda negli ultimi due periodi, adottando la politica ottima per il periodo 1 considerato separatamente (costo:  $102 + 36 + 85 = 223$ ); o infine ordinare nel periodo 1 per soddisfare tutte e tre le domande (costo:  $85 + 29 + 36 + 36 = 186$ ).

---

<sup>2</sup> Viene mostrato solo l'ultimo periodo di ordinazione; 567 indica che la politica ottima per i periodi da 1 a 7 consiste nell'ordinare nel periodo 5 per soddisfare  $d_5, d_6, d_7$ , adottando una politica ottima per i periodi da 1 a 4 considerati separatamente (*planning horizon theorem*).

Nell'esempio è ovvio che non sarà mai conveniente tenere in stock merci dal periodo 1 o 2 per soddisfare la domanda  $d_4$ , dal momento che i costi di stoccaggio superano i costi per un'ordinazione in tale periodo. Più in generale (teorema 3) non sarà mai conveniente portare scorte dal periodo 1 o 2 per soddisfare  $d_4, d_5, \dots, d_N$ , perché ciò implicherebbe anche una convenienza nel soddisfare  $d_4$  con un ordine fatto nel periodo 1 o 2 (cosa già dimostrata falsa). Si noti che i periodi da 1 ad 8 e da 8 a 10 comprendono degli orizzonti di pianificazione. Qualora si incontrino orizzonti temporali, i termini possono essere eliminati se si trovano sotto la diagonale sud-est per  $(1, 2, \dots, t^* - 1)t^*$ , come avviene nella tabella. È possibile ricostruire la politica ottima partendo dall'ultimo periodo e andando a ritroso: si ordinerà dunque al periodo 11, attuando poi la politica ottima per i periodi da 1 a 10, dunque il successivo ordine sarà fissato nel periodo 10, poi, secondo lo stesso ragionamento, nel periodo 8, 5, 3 ed infine 1. Il costo totale di questa politica ottima sarà di 864.

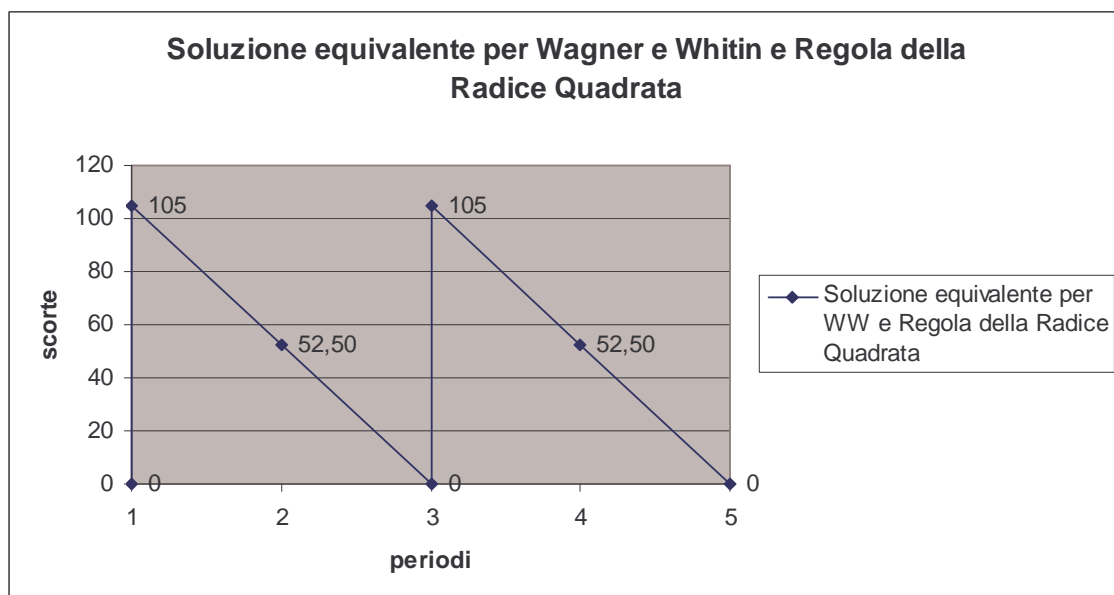


Si può facilmente verificare che l'algoritmo presentato produce risultati equivalenti alla regola della radice quadrata per EOQ quando le ipotesi di domande e costi di stoccaggio statici vengono reintrodotti. Facendo ancora riferimento alla tabella, assumendo una domanda pari al valor medio delle domande durante l'anno, quindi 52.5, e un costo di ordinazione anch'esso pari

al valor medio dei costi, dunque 102.80, ed infine un costo di stoccaggio di 1. La formula della radice quadrata darà come risultato:

$$Q = \sqrt{2ds/i} = \sqrt{2 \cdot 52.5 \cdot 102.8/1} = 104$$

dal momento che approssimando questa risulta essere circa la domanda su due mesi, arrotondiamo  $Q$  a 105 per motivi di comparazione. Applicando l'algoritmo appena illustrato otteniamo che per i primi due e per il terzo periodo le politiche ottime sono 12 ed (12)3, indicando con ciò che i primi due periodi costituiscono un orizzonte temporale e possono essere considerati a parte. Dal momento che ci troviamo in un caso in cui la domanda è statica, tutti gli orizzonti di pianificazione sono uguali (la domanda è infatti costante nel tempo), dunque gli ordini andranno fissati ogni due mesi. Il costo annuale può dunque essere ottenuto moltiplicando per 6 il costo di un ordine, quindi 931.80. D'altra parte il costo annuale può essere calcolato con le regole classiche per il lotto economico come  $12[(Q - d)i/2 + ds/Q] = 931.80$ . Dunque i due modelli si equivalgono.



Infine si noti che un'estensione a tale algoritmo è presentata in [HZ94]. Tale articolo illustra una versione con complessità in prima approssimazione lineare nel numero di periodi nell'orizzonte di pianificazione e in grado di dimezzare la richiesta in termini di occupazione di memoria.

## **Il problema del lotto economico in presenza di una domanda aleatoria e dinamica**

Il modello presentato da Wagner e Whitin risulta essere dinamico e deterministico, ovvero l'entità delle domande nei vari periodi variano ma sono note con certezza. Un diverso approccio alla versione dinamica di EOQ è presentato in [BT88]; in tale articolo i valori delle domande nei vari periodi non sono più noti con certezza, ma diventano variabili aleatorie come nel modello EOQ stocastico, a differenza di questo però viene a cadere l'ipotesi secondo cui tali v.a. sono statiche; come sostenuto da Silver in [S78-1] trovare la soluzione ottima per la versione stocastica e dinamica del problema del lotto economico risulta proibitivo dal punto di vista computazionale. Bookbinder e Tan propongono tre diverse strategie per affrontare tale situazione.

Prima di [BT88] altri avevano tentato approcci euristici verso questa formulazione del problema. Silver [S78-1] suggerisce una procedura sotto l'assunzione che gli errori di previsione siano distribuiti normalmente e possano essere ottenuti per ogni dato intervallo; l'approccio prevede tre fasi, e incorpora decisioni su quando ordinare, il numero di periodi che la domanda in un certo periodo deve coprire e la dimensione dell'ordine. Askin [A81] assume invece che tutte le correlazioni tra le domande siano note all'orizzonte degli eventi, la procedura da lui proposta tenta di ottenere un ordine che copra il numero desiderato di periodi al minimo costo.

La formulazione in [BT88] per la versione stocastica e dinamica del problema del lotto economico su un singolo prodotto incorpora un vincolo sul livello di servizio richiesto a fronte dell'evento di esaurimento scorte. Le tre strategie studiate sono la "static uncertainty", dove le decisioni di dimensionamento dei lotti devono essere tutte prese all'inizio del primo periodo; la "dynamic uncertainty", che invece permette di prendere decisioni riguardo le dimensioni dei lotti successivi al primo sulla base delle domande già divenute note; e la "static-dynamic uncertainty", che combina le caratteristiche delle due precedenti strategie.

Riportiamo nel seguito il modello e le assunzioni in [BT88] in quanto la notazione risulterà in seguito significativa.

La formulazione deterministica prevede:

$$\min \text{TRC} = \sum_{t=1}^T \{a \cdot \delta(X_t) + h(I_t) + v \cdot X_t\} \quad (13)$$

s.t. for  $t = 1, 2, \dots, T$

$$I_t = I_0 + \sum_{i=1}^t (X_i - d_i) \quad (14)$$

$$X_t, I_t \geq 0 \quad (15)$$

$$\delta(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

le variabili decisionali utilizzate sono:

$X_t$  il numero di unità da produrre nel periodo  $t$

$I_t$  le merci in magazzino dal periodo  $t$  al periodo  $t+1$

i parametri sono:

$T$  l'orizzonte temporale

$a$  il costo fisso di ordinazione

$h$  il costo per mantenere in magazzino un'unità di merce per un intervallo

$v$  il costo per unità di merce

$d_t$  la domanda nel periodo  $t$

$I_0$  le merci in magazzino all'istante  $0$ .

Vogliamo dunque trovare un piano di ordinazione che minimizzi TRC (il costo complessivo) sotto i vincoli descritti. Le componenti di costo sono, il prezzo fisso di un'ordinazione  $a \cdot \delta(X_t)$ , il costo di stoccaggio delle merci in magazzino  $h \cdot I_t$  e il costo delle merci  $v \cdot X_t$ .

Le assunzioni per il problema deterministico includono: arrivo delle merci istantaneo a fronte di un ordine, costi di stoccaggio lineari, orizzonte di pianificazione finito, e assenza di backlogging; inoltre la produzione (o le merci ordinate, infatti concettualmente i due esempi, produzione e ordinazione, si equivalgono) in un certo periodo possono essere usate per coprire richieste in periodi successivi. La domanda è conosciuta in anticipo con certezza.

Rispetto a tale versione deterministica del problema in [BT88] si modificano due assunzioni:

(i) All'inizio dell'orizzonte di pianificazioni la domanda per i vari periodi non è conosciuta con certezza; tuttavia la densità di probabilità della domanda  $g_t(d_t)$  è conosciuta con certezza e tutte queste variabili aleatorie sono mutuamente indipendenti.

(ii) Quando si va sotto scorta tutte le domande sono messe in coda e vengono soddisfatte appena le merci dell'ordine successivo arrivano. In ogni modo la probabilità che questo evento non si verifichi (ovvero che  $I_t$  sia non negativo) è imposta al valore  $\alpha$  nell'atto della formulazione del problema; di fatto tipicamente il livello di servizio richiesto dal management è alto (> 90%) quindi nel modello l'eventualità di andare sotto scorta può essere ignorata.

Possiamo dunque riformulare il problema con un modello di programmazione a vincoli probabilistica:

$$\min E[\text{TRC}] = \int \int \dots \int \sum_{d_t, t=1}^T [v \cdot X_t + a \cdot \delta(X_t) + h \cdot \text{Max}(I_t, 0)] \times g_1(d_1) \dots g_T(d_T) d(d_1) \dots d(d_T) \quad (17)$$

$$\text{s.t. for } t = 1, 2, \dots, T$$

$$\Pr\{I_t \geq 0\} \geq \alpha \quad (18)$$

$$\delta(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

$$I_t = I_0 + \sum_{i=1}^t (X_i - d_i) \quad (20)$$

$$X_t \geq 0 \quad (21)$$

Il modello si riferisce a  $d_t$  come variabili aleatorie continue, ma vale anche se si considera il caso discreto.

Per il problema di ottimizzazione stocastica esistono due principali strategie, come già accennato: la *static uncertainty* [GW74] e la *dynamic uncertainty* [GS77]. Nella letteratura che tratta la programmazione stocastica la *static uncertainty* è solitamente indicata come strategia *zero-order* (o costante), mentre la *dynamic uncertainty* è indicata come *non-zero-order*.

#### *La strategia static uncertainty*

Come già spiegato, nella strategia *static uncertainty* le decisioni vengono prese tutte all'inizio dell'orizzonte temporale, prima che ogni domanda divenga nota; questa strategia, fa notare Peters [PBK77], può risultare particolarmente utile se è necessario un tempo di preparazione lungo prima che la produzione inizi (o che gli ordini vengano resi noti).

Dato che tutti gli  $X_t$  in questa strategia sono decisi all'inizio del periodo 1, questi possono essere considerati costanti, dunque le variabili aleatorie  $I_t$  si possono ricavare come:

$$I_t = I_0 + \sum_{i=1}^t X_i - \sum_{i=1}^t d_i \quad (22)$$

e utilizzando tale equazione nel precedente modello:

$$\Pr\{I_0 + \sum_{i=1}^t X_i \geq \sum_{i=1}^t d_i\} \geq \alpha \quad (23)$$

se  $G_{d_1+d_2+\dots+d_t}(y)$  è la funzione di distribuzione cumulativa di  $D(t) = d_1 + d_2 + \dots + d_t$ , allora

$$\sum_{i=1}^t X_i \geq G_{D(t)}^{-1} - I_0 \quad (24)$$

Dove  $G_{D(t)}^{-1}$  è la funzione inversa tale che:  $G_{D(t)}^{-1}(\alpha) = u$  significa

$G_{D(t)}(u) = \alpha = \Pr\{D(t) \leq u\}$ . Sotto l'assunzione che  $G$  sia scelta strettamente crescente,  $G^{-1}$  è definita in modo univoco.

Dato che le  $\{d_t\}$  sono v.a. mutuamente indipendenti, è possibile riscrivere la funzione obiettivo come:

$$\min E[\text{TRC}] = \sum_{t=1}^T \{h \cdot E[\text{Max}(I_t, 0)] + a \cdot \delta(X_t) + v \cdot X_t\} \quad (25)$$

inoltre il termine  $E[\text{Max}(I_t, 0)]$  può essere approssimato con  $E[I_t]$  sotto l'assunzione (ii) precedentemente descritta.

Il modello completo per la *static uncertainty* è dunque:

$$\min E[\text{TRC}] = \sum_{t=1}^T \{h \cdot E[\text{Max}(I_t, 0)] + a \cdot \delta(X_t) + v \cdot X_t\} \quad (26)$$

s.t. for  $t = 1, 2, \dots, T$

$$E[I_t] = I_0 + \sum_{i=1}^t X_i - \sum_{i=1}^t E[d_i] \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^t X_i \geq G_{D(t)}^{-1} - I_0 \quad (28)$$

$$\delta(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (29)$$

$$X_t \geq 0 \quad (30)$$

Come mostrato in [BT88] in questa strategia il termine  $\sum_{t=1}^T v \cdot X_t$  nella funzione obiettivo non ha effetto sulla determinazione della politica ottima e può essere ignorato.

Partendo da questo modello è possibile mostrare che la sua struttura matematica è la stessa del modello deterministico:



definendo infatti  $\Delta D(t) = G_{D(t)}^{-1}(\alpha) - \sum_{i=1}^t E[d_i]$  possiamo riscrivere il modello come:

$$\min \sum_{t=1}^T \{h \cdot (E[I_t] - \Delta D(t)) + a \cdot \delta(X_t) + v \cdot X_t\} \quad (31)$$

s.t. for  $t = 1, 2, \dots, T$

$$E[I_t] - \Delta D(t) = I_0 + \sum_{i=1}^t X_i - G_{D(t)}^{-1}(\alpha) \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^t X_i \geq G_{D(t)}^{-1} - I_0 \quad (33)$$

$$\delta(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (34)$$

$$X_t \geq 0 \quad (35)$$

se confrontiamo tale modello con il problema deterministico illustrato all'inizio possiamo notare una forte analogia, nonostante alcuni vincoli differiscano sensibilmente:

Deterministic model	Vs	Static Uncertainty model
$d_t$	$\Leftrightarrow$	$G_{D(t)}^{-1}(\alpha) - G_{D(t-1)}^{-1}(\alpha)$
$\sum_{i=1}^t d_i$	$\Leftrightarrow$	$G_{D(t)}^{-1}(\alpha)$
$I_t$	$\Leftrightarrow$	$E[I_t] - \Delta D(t)$

Queste relazioni, seguendo la tecnica indicata in [BT88, p.1100] ci permettono di trasformare il modello *static uncertainty* in modo da poterlo trattare esattamente come se esso fosse deterministico, dunque siamo ora in grado di utilizzare

metodi noti come [WW58] o l'altro algoritmo di programmazione dinamica proposto da Zangwill [Z68] per ottenere la soluzione ottima per il problema.

Si può osservare che il modello deterministico altro non è che un caso particolare del modello *static uncertainty* quando la deviazione standard dell'errore di previsione è pari a 0.

### Stima di $G_{D(t)}^{-1}(\alpha)$

Risulta ora interessante riportare la tecnica con cui  $G_{D(t)}^{-1}(\alpha)$  viene stimata, in quanto il metodo verrà ampiamente utilizzato nel seguito. Le tecniche utilizzate dalle aziende per effettuare stime e previsioni tipicamente forniscono la domanda media e la corrispondente deviazione standard, ma non la distribuzione completa della domanda. In [BT88] viene descritto come ricavare  $G_{D(t)}^{-1}(\alpha)$  dalla media della domanda e dalla sua deviazione standard sotto le ipotesi di una distribuzione gaussiana degli errori di previsione avanzata da Fortuin [F80].

Per definizione  $D(t) = \sum_{i=1}^t d_i$  è normalmente distribuita se le v.a.  $\{d_i\}$  hanno tutte una distribuzione normale e sono mutuamente indipendenti. Siano dunque  $E[d_i]$  la media ed  $S_{d_i}$  la deviazione standard di  $d_i$ , secondo quanto sostenuto da Silver [S78-1] il coefficiente di variazione  $C$  è costante, quindi per ogni  $d_i$

$$S_{d_i} = C \cdot E[d_i] \quad (36)$$

dunque

$$S_{D(t)} = C \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^t E^2[d_i]} \quad (37)$$

Per ottenere il livello di servizio desiderato  $\alpha$ , il fattore di sicurezza  $Z \equiv \{D(t) - E[D(t)]\} / S_{D(t)}$  può essere ricavato dalle tabelle che riportano i valori standard per la distribuzione normale e  $G_{D(t)}^{-1}$  può essere ricavato come:

$$G_{D(t)}^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^t E[d_i] + Z \cdot S_{D(t)} = \sum_{i=1}^t E[d_i] + Z \cdot C \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^t E^2[d_i]} \quad (38)$$

possiamo poi stimare  $C$  come la pendenza della retta formata dalle coppie  $(E[d_i], S_{d_i})$  su un grafico, infatti se l'assunzione  $S_{d_i} = C \cdot E[d_i]$  è valida ovviamente otterremo una retta.

Queste considerazioni valgono per una distribuzione normale degli errori di previsione, in presenza di altre distribuzioni è possibile seguire le indicazioni date da Vajda [V72, pp. 81-84], nel seguito tuttavia faremo sempre e solo riferimento ad una distribuzione normale degli errori di previsione.

#### *La strategia dynamic uncertainty*

La strategia *static uncertainty* impone di prendere decisioni per l'intero orizzonte di pianificazione ( $T$  periodi) all'inizio del primo periodo. Nella pratica però spesso avviene che risulta scomodo essere vincolati a tali decisioni nei periodi seguenti; si preferisce invece poter rivedere i livelli di produzione  $X_t$  in funzione dei valori attuali assunti dalle variabili aleatorie nei periodi già trascorsi. La strategia *dynamic uncertainty* prende le mosse proprio da questa osservazione; di fatto non è molto utile nella pratica ma è fondamentale per giustificare la successiva strategia che verrà largamente utilizzata nel seguito: la *static-dynamic uncertainty*.

Supponendo che la struttura organizzativa di un'azienda sia sufficientemente flessibile da permettere di decidere di volta in volta i livelli di produzione  $X_t$ , un possibile approccio per le decisioni sugli ordini è quello proposto da Tan [T83] chiamato *Dynamic Uncertainty*. Per  $t > 1$  lo stato delle scorte è aggiornato non appena la domanda in  $t-1$  diviene nota, in tal modo la stima migliore a nostra disposizione è quella per  $d_t$  (o meglio  $G_{d_t}^{-1}(\alpha)$ ) e la quantità da produrre diviene  $X_t = \max[G_{d_t}^{-1}(\alpha) - I_{t-1}, 0]$ : in pratica c'è minore incertezza sulla domanda per i periodi successivi rispetto alla *static uncertainty* in quanto parte di essa è annullata dal fatto che possiamo reagire in  $t$  agli eventi aleatori che si sono già

verificati adeguando le scorte. Il modello presentato dunque permette di prendere decisioni sulla base delle informazioni che diventano note nei periodi successivi. Nella programmazione stocastica questa strategia è spesso indicata con il nome di *wait-and-see*. Chiaramente questo approccio presenta dei limiti: è infatti comune osservare utilizzando tale strategia piani che effettuano ordini in ognuno dei periodi dell'orizzonte di pianificazione; questo comportamento si verifica in seguito all'applicazione della logica *wait-and-see* stessa, nell'intento di ottenere quante più informazioni possibile prima di reagire, tale strategia può incorrere in costi fissi di ordinazione molto elevati in seguito all'alto numero di ordini effettuati. Tale risultato è chiaramente non desiderabile e lontano dall'ottimo per il problema specie nel caso di elevati rapporti  $\frac{a}{h}$ . In ogni caso quando invece  $\frac{a}{h}$  è piccolo, la strategia *dynamic uncertainty* può risultare efficace in quanto realizza politiche *just in time* che sotto tale ipotesi diventano desiderabili.

Dato che entrambe le politiche *static uncertainty* e *dynamic uncertainty* possono risultare efficaci a seconda degli scenari presi in considerazione, in [BT88] si propone di combinare le caratteristiche positive di entrambe le strategie per dar vita ad un nuovo modello chiamato *static-dynamic uncertainty*.

#### *La strategia static-dynamic uncertainty*

Tale strategia costituisce una delle possibili soluzioni per determinare una politica  $(R,S)$  dinamica nel caso in cui la domanda sia variabile nel tempo. Dove  $R$  indica la politica di ordinazione: ovvero i periodi in cui fissare gli ordini ed  $S$  i rispettivi valori di *order-up-to-level* ovvero il livello di scorte che si desidera avere in seguito all'ordine piazzato in un determinato periodo.

Più formalmente: si consideri una politica per gli ordini  $p = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  che realizzi  $m$  ordini, dove  $t_m \leq T$  e  $t_i$  è il periodo in cui l'*i-esimo* ordine è piazzato. Per convenzione fissiamo  $t_1 = 1$ ; è comunque sempre possibile generalizzare il

modello considerando il caso in cui  $t_1 > 1$  quando le scorte iniziali permettono di coprire alcuni periodi.

Questa politica potrebbe essere stata ottenuta attraverso l'uso della strategia *static-uncertainty* all'inizio del periodo 1. In ogni caso si considereranno solo i periodi in cui gli ordini vengono effettuati e si ricaveranno le rispettive dimensioni degli ordini come qui di seguito indicato:

si esprimano le variabili decisionali originali  $\{X_i\}$  in termini di un nuovo set di variabili decisionali  $\{Y_i\}$  come indicato da Johnson e Montgomery [JM74]

$$\begin{aligned}
 X_{t_1} &= Y_{t_1} \\
 X_{t_2} &= Y_{t_2} + d_{t_1} + \dots + d_{t_2-1} \\
 &\vdots \\
 X_{t_m} &= Y_{t_m} + d_{t_{m-1}} + \dots + d_{t_m-1} \\
 X_t &= 0 \quad \text{for all } t \notin p
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

$Y_{t_i}$  può essere interpretato come la variazione dal periodo  $t_{i-1}$  al periodo  $t_i$  nel livello di scorte desiderato. Da notare che  $X_{t_i} > 0$  for all  $t_i \in p$ .

In tale modello, la strategia *static uncertainty* è applicata nei periodi  $t_i$  fino a  $(t_{i+1} - 1)$ , dove entrambi  $t_i$  e  $t_{i+1} \in p$ . Ciò significa che, fissata la dimensione del lotto  $X_{t_i}$  all'inizio del periodo  $t_i$ , nessun ordine sarà previsto tra i periodi  $(t_i + 1)$  e  $(t_{i+1} - 1)$ . Dunque la  $X_{t_i}$  dovrà essere abbastanza grande da garantire che in questo intervallo la probabilità di andare sotto scorta sia meno di  $(1 - \alpha)\%$ ; tuttavia come nella strategia *dynamic uncertainty*, le variabili decisionali  $\{X_{t_i}\}$  dipenderanno in modo esplicito dai valori noti delle domande  $d_j$  per tutti i periodi sino alla decisione di produzione più recente: quindi per ogni  $j = t_{i-1}, \dots, t_i - 1$ .

Per soddisfare il vincolo di non negatività dobbiamo imporre poi:

$$Y_{t_i} \geq - \sum_{j=t_i-1}^{t_i-1} d_j, \quad i = 2, 3, \dots, m \quad (40)$$

Il livello di scorte alla fine del periodo  $t_j$  può essere espresso usando le  $\{Y_{t_i}\}$

come

$$I_{t_j} = I_0 + \sum_{t=1}^j Y_{t_i} - d_{t_j} \quad (40A)$$

Con questa equazione assieme alla (39) il vincolo per il livello di servizio voluto (18) diventa:

$$\sum_{i=1}^j Y_{t_i} \geq G_{d_{t_j} + d_{t_{j+1}} + d_{t_{j+2}} + \dots + d_{t_{j+1}-1}}^{-1}(\alpha) - I_0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (41)$$

[nota che per  $j = m$  la funzione di distribuzione cumulativa arriva fino a  $d_T$ ]

La formula presentata per  $I_{t_j}$  fornisce il livello di scorte per ogni periodo  $t_j \in p$ .

Negli altri periodi, cioè  $t_j < t < t_{j+1}$ , il livello di scorte alla chiusura è ovviamente

$I_t = I_{t_j} - d_{t_{j+1}} - d_{t_{j+2}} - \dots - d_t$ . Utilizzando queste espressioni per le scorte e

trasformando le variabili decisionali da  $\{X_{t_i}\}$  a  $\{Y_{t_i}\}$  otteniamo il modello per la

strategia *static-dynamic uncertainty*:

$$\begin{aligned} & \min E[\text{TRC}] = \\ & m \cdot a + v \cdot \left\{ \sum_{i=1}^m Y_{t_i} + \sum_{i=1}^{t_m-1} E[d_i] \right\} + h \cdot \left\{ \sum_{i=1}^m (T - t_i + 1) Y_{t_i} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=t_i}^{t_{i+1}-1} (t_{i+1} - j) E[d_j] \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

s.t. (40) e (41).

Come accennato è l'espressione presentata per le variabili decisionali che rappresentano le scorte che porta alla nuova funzione obiettivo, in particolare alla

nuova espressione per il costo di stoccaggio. Questa componente della funzione obiettivo appare sotto una forma diversa perché abbiamo specificato il piano

degli ordini come  $p = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  e perché stiamo lavorando con le  $\{Y_{t_i}\}$  piuttosto

che con le  $\{X_{t_i}\}$ . Le variabili ausiliarie  $\{Y_{t_i}\}$  non devono essere confuse con le

$\{X_{t_i}\}$ , in particolare nel vincolo (40) si può notare che le  $\{Y_{t_i}\}$  possono assumere valori negativi: infatti esse sono variazioni nel livello di scorte.

Possiamo ora osservare che il modello *static-dynamic uncertainty* è semplicemente un modello di programmazione lineare nelle  $\{Y_{t_i}\}$ . Infatti i valori di tali variabili decisionali per  $t_i \in p$  possono essere calcolate all'inizio del periodo 1.

In altre parole, dal momento che  $X_{t_i} > 0$  per  $t_i \in p$ , il vincolo (40) sarà soddisfatto, ma non si verificherà mai un'uguaglianza tra i due termini; dunque sarà l'altro vincolo (41) il più restrittivo, cioè quello che all'ottimalità sarà soddisfatto all'uguaglianza determinando la soluzione per LP. Tale vincolo è *totalmente deterministico* e dal momento che l'inverso delle funzioni di distribuzione cumulativa sono note sin dall'inizio dell'orizzonte temporale, le  $\{Y_{t_i}\}$  potranno essere ottenute per  $t_i \in p$  all'inizio del periodo 1.

Da notare che le  $\{Y_{t_i}\}$  non sono variabili aleatorie. Esse sono variabili decisionali deterministiche che ci permettono di derivare la formulazione deterministica equivalente al problema stocastico. Queste variabili decisionali ci portano alla minimizzazione del valore atteso per il costo complessivo sull'orizzonte dei  $T$  periodi considerati. Ad ogni modo la dimensione del lotto per un certo periodo  $t_i$ , dunque  $X_{t_i}$ , non potrà essere nota fintantoché non saranno note anche le domande effettivamente realizzate fino al periodo  $t_i - 1$ . L'espressione (39) per ricavare le variabili decisionali  $\{Y_{t_i}\}$  come indicato da Johnson e Montgomery [JM74] è tipica di una regola *non-zero-order* (cioè di una strategia *dynamic uncertainty*) in programmazione stocastica: si attende che la domanda realizzata diventi nota, dopo aver deciso a priori, stabilendo i livelli di order-up-to-level, come questa conoscenza acquisita debba essere utilizzata [V72, p.98-100]; dunque l'analisi può essere completata all'inizio dell'orizzonte degli eventi.

### *Ambiente a orizzonte mobile (rolling schedule environment)*

Abbiamo descritto finora il modello *static-dynamic uncertainty* per un particolare piano di ordini  $p$  e abbiamo visto che tale modello ci porta ad un LP facilmente risolvibile; abbiamo anche visto che un possibile modo di ottenere tale piano  $p$  è di ricavarlo mediante la strategia *static uncertainty*. Tipicamente tuttavia spesso ci si trova a lavorare in ambienti a orizzonte mobile [B77]. L'approccio ad orizzonte mobile è spesso applicato perché le previsioni per periodi lontani sono spesso difficili da eseguire e per di più hanno tipicamente una bassa attendibilità. In questo nuovo approccio la strategia è quella di risolvere un problema ad orizzonte finito su  $M$  periodi (con  $M < T$ ,  $M$  dimensione della finestra di previsione) fissando però solo la decisione relativa al primo degli  $M$  periodi; al successivo istante in cui si verifica una revisione delle scorte nuove informazioni diventano disponibili e dunque è possibile migliorare la qualità delle previsioni, spostare l'orizzonte degli eventi al periodo successivo e risolvere il problema sui nuovi  $M$  periodi; il processo continua fino al tempo  $T$ , ovvero alla fine del tempo di pianificazione fissato.

In un ambiente a orizzonte mobile i punti critici sono:

- la decisione riguardante le dimensioni di  $M \rightarrow$  finestra di previsione
- il modo in cui le distribuzioni delle domande verranno corrette in seguito all'acquisizione dei nuovi dati

Inoltre, anche se la strategia *static uncertainty* fosse efficace e non ci fosse bisogno di aggiornare le distribuzioni delle domande, in ogni caso le domande realizzate potrebbero suggerire una revisione del piano di produzione; dunque un altro punto critico risulta essere:

- la decisione riguardante la frequenza con cui il piano di produzione deve essere aggiornato

Ovviamente l'estremo opposto è dato dalla strategia *dynamic uncertainty* dove il piano è aggiornato ad ogni periodo e le quantità da produrre sono vengono determinate solo in base al valore attuale di  $I_{t-1}$  e  $G_{d_t}^{-1}(\alpha)$ , dunque considerando solo l'inverso della distribuzione della domanda per il singolo periodo  $t$ . Sotto



questa luce la *dynamic uncertainty* non è altro che una strategia ad orizzonte mobile con  $M = 1$ .

Un approccio intermedio è ancora quello dato dalla strategia *static-dynamic uncertainty* dove gli ordini sono pianificati per i periodi  $t_i \in p$  ma ogni dimensione del lotto di produzione per un determinato periodo è calcolato solo all'inizio del periodo stesso. In tal caso l'inverso della funzione di distribuzione cumulativa può essere espresso come  $G_{d_{t_j} + \dots + d_{t_{j+1}} - 1}^{-1}$ , in modo da esprimere la distribuzione cumulativa tra ordini successivi, come avviene nel vincolo (41).

Il modello ricavato mediante la strategia *static-dynamic uncertainty* risulterà meno "nervoso" rispetto a quello ricavato tramite la *dynamic uncertainty*, quindi rispecchierà meglio le pratiche industriali. Tuttavia è doveroso sottolineare che un approccio ad orizzonte mobile non solo richiede di fissare esclusivamente la quantità da produrre  $X_1$  relativa al primo periodo  $t_1 \in p$ , ma non impone neanche che gli altri periodi  $t_2, t_3, \dots$  siano fissati: al tempo  $t_1$  (o prima a seconda dello stato delle scorte). Diventa dunque necessario risolvere un nuovo problema su  $M$  periodi fissando nuovamente solo la decisione per il primo di questi. Quindi per una decisione sulla produzione quando il periodo  $j$  viene preso in considerazione, tale approccio richiederà il calcolo della domanda deterministica equivalente dal periodo  $j$  in avanti. la formula (38) dovrà dunque essere sostituita da:

$$G_{d_{t_j} + d_{t_{j+1}} + \dots + d_{t_{j+K}}}^{-1}(\alpha) = \sum_{i=j}^{j+K} E[d_i] + Z \cdot S_{D(\text{next } K \text{ periods})} = \sum_{i=j}^{j+K} E[d_i] + Z \cdot C \cdot \sqrt{\sum_{i=j}^{j+K} E^2[d_i]}$$

per  $K = 1, 2, \dots, M - 1$  (43)

Riassumendo, ogni vantaggio apportato dal modello *static-dynamic uncertainty* rispetto allo *static uncertainty* si rileva solo se l'orizzonte è statico. Dunque tale vantaggio si perde in presenza di una situazione ad orizzonte mobile ed è possibile in tal caso applicare semplicemente la strategia *static uncertainty* ad ogni gruppo di  $M$  periodi, fissando di volta in volta solo la decisione relativa al primo come già descritto e come dettagliatamente illustrato in [BT88].

*Limiti dell'approccio a due stadi di Bookbinder e Tan per la strategia static-dynamic uncertainty*

Abbiamo descritto l'approccio a due stadi che Bookbinder e Tan propongono assieme alla strategia *static-dynamic uncertainty* per la risoluzione del problema del lotto economico a singolo elemento con domande stocastiche e dinamiche. Si è osservato come nella strategia *static-dynamic uncertainty* l'idea sia quella di fissare i periodi di ordinazione delle merci all'inizio dell'orizzonte di pianificazione, per poi fissare l'entità reale degli ordini solo all'arrivo di tali periodi sulla base della domanda realizzata. La soluzione proposta da Bookbinder e Tan è tuttavia euristica, come si è già osservato: essi propongono di fissare infatti in un primo stadio i periodi in cui ordinare le merci, in sostanza la politica  $p$ , mediante la strategia *static uncertainty* e in un secondo stadio di determinare gli aggiustamenti da apportare agli ordini pianificati sulla base della domanda effettiva che si è realizzata nei periodi già trascorsi: dunque la politica  $S$  degli order-up-to-level; tali aggiustamenti sono espressi come margini da aggiungere alla somma totale delle domande ricevute in tutti i periodi a partire da quello in cui l'ultimo ordine è stato fissato, in modo da soddisfare il livello di servizio richiesto. Il modello presentato da Bookbinder e Tan inoltre esclude con la sua euristica l'effetto di un costo unitario variabile  $v$  di produzione/acquisto delle merci. Tarim e Kingsman osservano in [TK03] che l'esistenza di un tale costo, assieme al vincolo pratico di ordini non negativi (ricordiamo che il backlogging non è previsto, quindi non è possibile rimandare indietro le merci), rendono dipendenti i cicli di rifornimento; non è dunque possibile, suggeriscono, considerarli indipendenti risolvendo il problema come una versione stocastica del modello di Wagner e Whitin applicando l'algoritmo *shortest route*.

***Un modello di programmazione lineare intera mista per determinare la politica ottima utilizzando la strategia static-dynamic uncertainty***

La soluzione proposta da Bookbinder e Tan separa il processo di risoluzione in due fasi indipendenti, ignorando le interazioni che di fatto sussistono tra essi, come già accennato è dunque una soluzione prettamente euristica. Tarim e Kingsman al contrario hanno suggerito un metodo alternativo, non euristico, per ottenere la soluzione ottima per la strategia *static-dynamic uncertainty*. Questa tecnica permette di stabilire in modo simultaneo (comprimendo le due fasi in una singola) il numero degli ordini necessari, i periodi in cui tali ordini devono essere eseguiti e le informazioni necessarie per determinare la dimensione degli ordini stessi minimizzando il valore atteso del costo da affrontare per venire in contro alla domanda nell'orizzonte di pianificazione; tutto ciò una volta che siano state fornite una serie di previsioni per le domande e un vincolo sul livello di servizio da garantire per l'evento di esaurimento scorte.

In sostanza Tarim e Kingsman [TK03] hanno proposto un modello che descrive il processo di trasformazione descritto da Bookbinder e Tan in modo tale da permettere la determinazione simultanea dei periodi in cui eseguire gli ordini e dell'entità degli ordini stessi in un singolo passo. Le decisioni iniziali dipendono dalle informazioni che si sa diverranno note in futuro e cercano di reagire al meglio in accordo a tale conoscenza. Inoltre, i periodi in cui eseguire gli ordini sono determinati all'inizio dell'orizzonte di pianificazione tenendo conto dell'interdipendenza tra i livelli di scorte che si hanno a disposizione all'inizio di tali periodi e degli intervalli che tra essi intercorrono (dunque tenendo conto dei periodi in cui non si eseguono ordini e dove la domanda deve essere soddisfatta con le scorte che si hanno in magazzino). I valori reali degli ordini diventano, come stabilito nella politica *static-dynamic uncertainty*, noti solo all'arrivo dei rispettivi periodi, come è noto infatti tali valori dipenderanno dall'effettiva domanda che è stata realizzata. Si assume che non siano ammessi ordini negativi, dunque se le scorte iniziali superano il livello minimo necessario a

coprire un ciclo di rifornimento, tale eccesso di scorte verrà comunque portato avanti e non sarà possibile restituire (backlogging) le merci inutilizzate.

Sono nel seguito indicate le modifiche da apportare al modello di programmazione a vincoli stocastica sotto queste nuove ipotesi.

Prendiamo dunque in considerazione l'equazione (40A): in questo caso il numero degli ordini e i periodi relativi non sono tuttavia noti, infatti essi sono ancora variabili decisionali a cui è necessario assegnare un valore. Definiamo ora

$$R_{t_i} = I_0 + \sum_{j=1}^i Y_{t_j} \quad (44)$$

ed effettuiamo la sostituzione nell'equazione (40A):

$$I_t = R_{t_i} - \sum_{k=t_i}^t d_k \quad t_i \leq t < t_{i+1} \quad i = 1, \dots, m \quad (45)$$

Si può notare che  $R_{t_i}$  può essere interpretato come un *order-up-to-level* al quale le scorte devono essere portate dopo aver ricevuto un ordine all'*i-esimo* periodo di rifornimento, inoltre

$$R_{t_i} - \sum_{k=t_i}^t d_k \quad (46)$$

è il livello finale delle scorte per il periodo di rifornimento considerato.

Dunque, invece di lavorare in termini delle  $Y_{t_i}$  come variabili decisionali come proposto da Bookbinder e tan nel loro modello, il problema può essere esteso in termini di queste nuove variabili decisionali  $R_{t_i}$ . Quindi il nuovo modello prevede di determinare il numero di rifornimenti,  $m$ , ovvero i  $t_i$ , e gli  $R_{t_i}$  associati ad essi per  $i = 1, \dots, m$ .

Se per il periodo  $t$  non è previsto un ordine allora  $R_t$  risulterà pari al livello delle scorte in apertura nel periodo  $t$ . L'equazione (45) può essere quindi riscritta come:

$$I_t = R_t - d_t \quad t = 1, \dots, N \quad (47)$$

Ne segue che la variabile  $R_t$  deve essere pari a  $I_{t-1}$  se non è stato ricevuto un ordine nel periodo  $t$ , mentre deve essere pari al valore di *order-up-to-level* se si verifica un rifornimento. Il primo caso si applica se non è previsto un rifornimento nel periodo  $t$ , indicheremo tale eventualità con la variabile intera  $\delta_t = 0$ . Se quindi  $\delta_t = 0$  allora  $R_t$  dovrà essere pari a  $I_{t-1}$ . Dato che i vincoli risultano essere  $R_t \leq I_{t-1}$  ed  $R_t \geq I_{t-1}$ , possiamo esprimerli con le seguenti disequazioni per  $\delta_t = 0$ :

$$R_t - I_{t-1} \leq M\delta_t, \quad (48)$$

$$R_t \geq I_{t-1}, \quad t = 1, \dots, N \quad (49)$$

dove  $M$  è un numero grande a piacere.

Nel caso in cui  $\delta_t = 1$  allora i vincoli richiederanno che  $R_t$  stia tra  $I_{t-1}$  e  $\infty$  in modo da soddisfare l'altra condizione su  $R_t$ . I valori per le variabili  $R_t$  che esprimono gli *order-up-to-level* quando  $\delta_t = 1$  sono quelli che offrono il minimo valore atteso per il costo  $E[TC]$ . I livelli desiderati di apertura per le scorte, come richiesto per la soluzione al problema, saranno dunque quei valori di  $R_t$  tali che  $\delta_t = 1$ . Nel nuovo modello verranno quindi utilizzate queste nuove equazioni (47), (48) e (49) al posto dei vincoli (27) e (29).

Come già menzionato,  $\alpha$  è il valore della probabilità minima desiderata che il livello di scorte in ogni istante sia di fatto non negativo. Sotto questa considerazione il vincolo stocastico (18) può essere riscritto utilizzando l'equazione (45):

$$\Pr \left\{ R_{t_i} \geq \sum_{k=t_i}^t d_k \right\} \geq \alpha, \quad t = 1, \dots, N \quad (50)$$

il che implica:

$$G_{d_{t_i} + d_{t_{i+1}} + \dots + d_t}(R_{t_i}) \geq \alpha, \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m \quad (51)$$

e anche:

$$I_t \geq G_{d_{t_i}+d_{t_i+1}+\dots+d_t}^{-1}(R_{t_i}) - \sum_{k=t_i}^t d_k, \quad t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m \quad (52)$$

La parte destra dell'equazione (52) può essere calcolata o letta da una tabella, dopo che si è selezionato il tipo di  $g_t(\bullet)$  voluto.

Si deve notare che il termine  $G_{d_{t_i}+d_{t_i+1}+\dots+d_t}^{-1}(R_{t_i})$  di (52) può essere determinato solo dopo che i periodi  $t_i$  in cui effettuare gli ordini siano stati anch'essi determinati. Ma, dal momento che questi vengono scelti per minimizzare i costi attesi, i periodi migliori per effettuare gli ordini non possono essere scelti fintantoché i valori appropriati di  $G_{d_{t_i}+d_{t_i+1}+\dots+d_t}^{-1}(R_{t_i})$  da usare nel modello rimangono non noti. C'è un'ovvia circolarità coinvolta nella risoluzione di questo problema. Dal momento che Bookbinder e Tan separano la determinazione degli istanti di ordinazione da quella degli aggiustamenti necessari per le scorte in tali istanti, essi evitano la circolarità sacrificando l'ottimalità. Un modo di superare questo problema senza sacrificare l'ottimalità della soluzione è quello di utilizzare un modello di programmazione lineare intera mista.

Siccome il problema ha un orizzonte di pianificazione finito ( $N$  periodi),  $G_{d_{t_i}+d_{t_i+1}+\dots+d_t}^{-1}(R_{t_i})$  può essere calcolato per tutti i casi significativi. Se definiamo le variabili decisionali intere  $P_{tj} \in \{0,1\}$  in modo che esse assumano il valore 1 se l'ordine più recente rispetto al periodo  $t$  si trova nel periodo  $t-j+1$  e 0 altrimenti, allora  $G_{d_{t_i}+d_{t_i+1}+\dots+d_t}^{-1}(R_{t_i})$  può essere espresso come:

$$G_{d_{t_i}+d_{t_i+1}+\dots+d_t}^{-1}(R_{t_i}) = \sum_{j=1}^t G_{d_{t-j+1}+d_{t-j+2}+\dots+d_t}^{-1}(R_{t_i}), \quad t = 1, \dots, N \quad (53)$$

Quindi possiamo esprimere l'equazione (52) come:

$$I_t \geq \sum_{j=1}^t \left( G_{d_{t_i}+d_{t_i+1}+\dots+d_t}^{-1}(R_{t_i}) - \sum_{k=t-j+1}^t d_k \right) P_{tj}, \quad t = 1, \dots, N \quad (54)$$

Il risultato  $P_{tt} = 1$  significa che l'ordine è stato fissato per il periodo 1, l'inizio dell'orizzonte degli eventi, mentre  $P_{t1} = 1$  significa che esso è stato fissato

all'inizio del periodo  $t$  stesso. Ci può essere al più solo un ordine più recente ricevuto prima del periodo  $t$ . Dunque,  $P_{ij}$  deve soddisfare

$$\sum_{j=1}^t P_{ij} = 1, \quad t = 1, \dots, N \quad (55)$$

Ci sono tre condizioni fondamentali illustrate di seguito per identificare univocamente il periodo in cui la revisione più recente delle merci in magazzino prima di ogni periodo  $t$  debba avere luogo.

- Se  $\delta_{t-j+1} = 1$  e  $\sum_{k=t-j+2}^t d_k = 0$  allora tutti i seguenti  $d_k$  per  $k = t-j+2, t-j+3, \dots, t$  sono pari a 0, quindi necessariamente dobbiamo avere  $P_{ij} = 1$  poiché in queste circostanze il periodo  $t-j+1$  aveva la revisione delle scorte più recente prima del periodo  $t$ .
- Se  $\delta_{t-j+1} = 0$  e  $\sum_{k=t-j+2}^t d_k = 0$ , allora  $P_{ij} = 0$  poiché la revisione più recente prima del periodo  $t$  deve avvenire necessariamente prima di  $t-j+1$ .
- Se  $\delta_{t-j+1} = 1$  e  $\sum_{k=t-j+2}^t d_k \geq 1$ , allora  $P_{ij} = 0$ , dal momento che le altre revisioni delle scorte prima del periodo  $t$  si sono verificate dopo il periodo  $t-j+1$ .

Tutte e tre queste condizioni possono essere soddisfatte dalla condizione data dall'equazione precedente assieme al vincolo descritto sotto, che sono strutturati per identificare in modo univoco il periodo in cui l'ordine più recente prima di  $t$  ha avuto luogo.

$$P_{ij} \geq \delta_{t-j+1} - \sum_{k=t-j+2}^t \delta_k, \quad t = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, t \quad (56)$$

Possiamo ora esprimere il modello MIP completo; tale modello di programmazione stocastica a vincoli può essere ricavato minimizzando la funzione obiettivo in (17) sotto i vincoli espressi da (47), (48), (49), (54), (55), (56), assieme alle condizioni di non negatività per le variabili decisionali e il

vincolo di dominio per le variabili  $\delta_t, P_{ij} \in \{0,1\}$ . Dal momento che la regola scelta per il problema di programmazione stocastica qui presentato è la strategia *static-dynamic uncertainty*, i periodi in cui vengono fissati gli ordini, che possono essere ottenuti osservando  $\delta_t$  e  $P_{ij}$ , devono essere fissati prima che una qualsiasi delle domande diventi nota. Inoltre l'operatore che indica i valori attesi  $E[\bullet]$  deve essere applicato alle variabili aleatorie  $I_t, R_t$  e  $d_t$  nei vincoli e nella funzione obiettivo; quindi nel modello che verrà presentato in seguito tali valori saranno indicati con  $E[I_t], E[R_t]$  ed  $E[d_t]$  rispettivamente.

Tale analisi viene completata all'inizio dell'orizzonte di pianificazione ottenendo i valori attesi, a questo punto si ricava il modello deterministico equivalente per la programmazione a vincoli stocastica sotto la strategia *static-dynamic uncertainty* [BT88]; tale modello è:

$$\min E[TC] = \sum_{t=1}^N (a\delta_t + h \cdot E[I_t] + v \cdot E[R_t] - v \cdot E[I_{t-1}]) \quad (57)$$

dove  $v$  è il costo unitario variabile di acquisto di un prodotto e dove il costo totale atteso per unità di merce  $\sum_{t=1}^N v \cdot E[X_t]$  è espresso come

$\sum_{t=1}^N (v \cdot E[R_t] - v \cdot E[I_{t-1}])$  seguendo la definizione di *order-up-to-levels*,  $R_t$ .

s.t.

$$E[I_t] = E[R_t] - E[d_t], \quad t = 1, \dots, N \quad (58)$$

$$E[R_t] \geq E[I_{t-1}], \quad t = 1, \dots, N \quad (59)$$

$$E[R_t] - E[I_{t-1}] \leq M\delta_t, \quad t = 1, \dots, N \quad (60)$$

$$E[I_t] \geq \sum_{j=1}^t \left( G_{d_{i_t} + d_{i_{t+1}} + \dots + d_t}^{-1}(\alpha) - \sum_{k=t-j+1}^t E[d_k] \right) P_{ij}, \quad t = 1, \dots, N \quad (61)$$

$$\sum_{j=1}^t P_{ij} = 1, \quad t = 1, \dots, N \quad (62)$$

$$P_{ij} \geq \delta_{t-j+1} - \sum_{k=t-j+2}^t \delta_k, \quad t = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, t \quad (63)$$



$$E[I_t], E[R_t] \geq 0, \quad d_t, P_{ij} \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, t \quad (64)$$

Questo modello dunque determina il numero ottimo di ordini, i periodi in cui essi devono essere eseguiti, sia i valori di *order-up-to-level* che serviranno per determinare dinamicamente l'entità degli ordini stessi sulla base delle domande effettivamente realizzate. Il problema è ovviamente quello di determinare i valori per tutte le variabili decisionali nel modello, dunque le variabili intere 0/1  $\delta_t$  per  $t = 1, \dots, N$  e  $P_{ij}$  per  $t = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, t$ , le variabili continue non negative  $E[I_t]$  ed  $E[R_t]$  per  $t = 1, \dots, N$ , in modo tale da minimizzare la funzione obiettivo indicata. Per rispettare il vincolo di non negatività è stato usato il vincolo (60). Il numero ottimo di ordini può essere ottenuto osservando per quante volte  $\delta_t = 1$  per  $i = 1, \dots, N$ , i rispettivi *order-up-to-level* possono essere ottenuti osservando i valori assunti da  $E[R_t]$  per  $i = 1, \dots, N$ .

Precedentemente si è mostrato che l'euristica presentata da Bookbinder e Tan ignorava il costo unitario delle merci per determinare la politica ottima, come è consueto fare nel caso deterministico in seguito a quanto rilevato da Wagner e Whitin. Tuttavia, in contrasto a tale euristica presentata in [BT88], la formulazione data sopra non ignora tale costo variabile. Se riscriviamo la funzione obiettivo come

$$\begin{aligned} & v \sum_{t=1}^N (E[R_t] - E[I_{t-1}]) \\ &= -vI_0 + v \sum_{t=1}^{N-1} (E[R_t] - E[I_t]) + vE[R_N] \\ &= -vI_0 + v \sum_{t=1}^{N-1} (E[d_t]) + vE[R_N] \end{aligned}$$

utilizzando l'equazione (58) per  $t = 1, \dots, N$ . Dunque, uno può scrivere il membro che rappresenta il costo variabile per unità di prodotto come  $\phi + vE[R_N]$ , dove  $\phi$  è una costante pari a  $v$  moltiplicato per il valore delle scorte in apertura più la domanda attesa per i primi  $N - 1$  periodi. È quindi chiaro che il totale risultante dal costo variabile per unità di prodotto è funzione di  $E[R_N]$ , variabile del

modello. Dunque la soluzione del problema di ottimizzazione è chiaramente influenzata dal costo variabile di produzione per unità di merce.

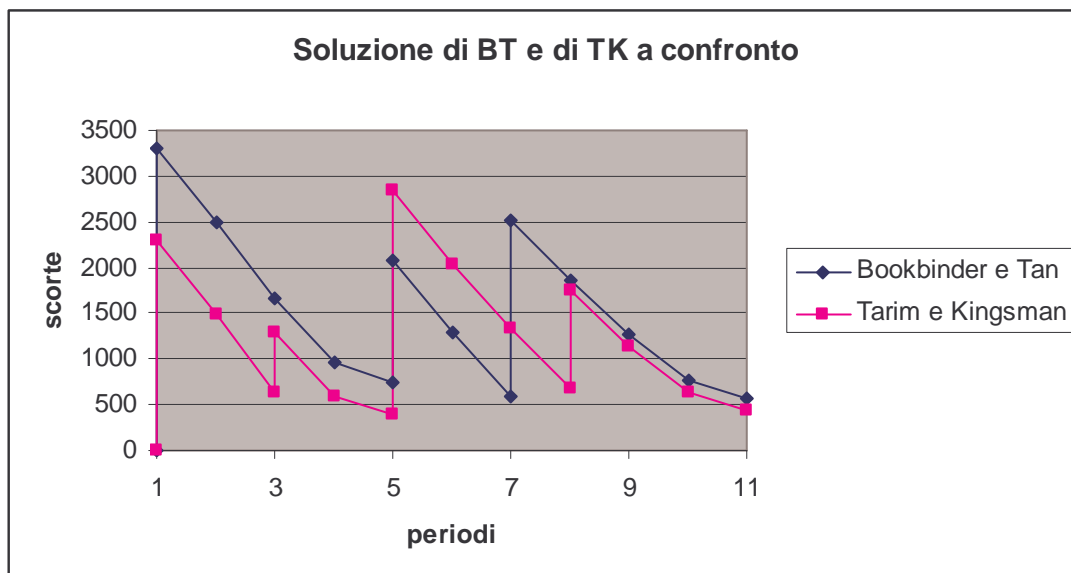
È possibile verificare l'efficacia del modello proposto osservando gli esempi numerici riportati in [TK03], a tal fine si utilizzerà la previsione della domanda illustrata nella seguente tabella

Previsioni per la domanda:

Periodo(k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E[d_k]$	800	850	700	200	800	700	650	600	500	200

il livello di scorte iniziali si considera nullo. La domanda in ogni periodo si assume a distribuzione normale con un coefficiente di variazione costante  $C = \sigma_t / \mu_t = 0.333$ . Gli altri parametri del problema sono  $a = 2500$  per ordine,  $h = 1$  per unità per periodo, ed  $\alpha = 0.95$  ( $z_{\alpha=0.95} = 1.645$ ). Dal momento che l'euristica di Bookbinder e Tan ignora il costo di acquisto variabile unitario  $v$ , l'esempio non lo terrà in considerazione.

Le due politiche di rifornimento ottenute sono rispettivamente:



Dove il costo totale atteso per la strategia ottenuta con il modello di Bookbinder e Tan è 19704, mentre per quella di Tarim e Kingsman esso risulta essere 19404.

## ***Un modello CP per determinare la politica ottima utilizzando la strategia static-dynamic uncertainty***

Il modello MIP presentato in precedenza risolve i problemi di sub-ottimalità della soluzione euristica proposta da Bookbinder e Tan. È possibile osservare tuttavia che il modello proposto risulta relativamente complesso e poco *naturale* per rappresentare il problema originale; esso inoltre fa uso di un numero di vincoli e di variabili decisionali elevato, in seguito a ciò le istanze diventano presto intrattabili (orizzonte di pianificazione superiore a 40) anche per i migliori solver MIP presenti sul mercato. Tarim e Smith hanno dunque proposto in [TS05] un nuovo modello di *constraint programming* per il problema; hanno osservato che tale modello risulta più *naturale* per esprimere il problema originale e che soprattutto esso utilizza un minor numero di vincoli e di variabili decisionali risultando dunque più trattabile rispetto al MIP. Il problema fondamentale del modello proposto da Tarim e Kingsman è il numero di variabili intere binarie utilizzato, che cresce in modo polinomiale con la dimensione del problema. In [TS05] gli autori offrono dunque un modello alternativo basato su *constraint programming* per la determinazione della politica (R,S) ottima. La potenza espressiva di CP riduce nel modello il numero di variabili decisionali utilizzate da  $(N^2 + 5N)/2$ , ovvero il numero usato nella formulazione MIP, a  $2N$  e il numero di vincoli da  $(N^2 + 9N)/2$  a  $3N$ . L'osservazione cruciale dietro a questa drastica riduzione del numero di variabili è il fatto che CP permette alle variabili decisionali di avere indici che sono anch'essi variabili decisionali. Le evidenze sperimentali in [TS05] hanno mostrato l'efficacia di questa nuova formulazione per il problema.

Un problema di soddisfacimento di vincoli (CSP) su un dominio finito può essere espresso come: dato un set di variabili assieme ad un set dei possibili valori che queste possono assumere e data una lista di vincoli, è necessario assegnare ad ogni variabile un valore tale che complessivamente tutti i vincoli siano rispettati dagli assegnamenti eseguiti. Esistono solver che permettono di esprimere CSP e mettono a disposizione algoritmi standard per la loro risoluzione [A03]. Una trattazione estesa su come effettuare la conversione da *mixed programming* a

*constraint programming* viene data da Brailsford et al. [BPS99] e da Lustig e Puget [LP01].

Sebbene CP sia una tecnica potente per risolvere problemi combinatori e nonostante alcuni problemi di gestione delle scorte ricadano in questa categoria, la programmazione a vincoli non è stata ancora sfruttata in modo sistematico ed esplorata a sufficienza in questo campo. Alcune eccezioni vengono citate in [TS05, p. 6].

Viene riportata nel seguito la formulazione CP data in [TS05] per il modello relativo alla politica (R,S), o *static-dynamic uncertainty* come chiamata in [BT88]. Si può notare che il modello MIP presentato in precedenza potrebbe benissimo essere usato come modello CP, tuttavia il modello seguente sfrutta in modo più sistematico le potenzialità offerte da CP, in particolare in termini di espressività nell'uso dei vincoli: proprio in questo modo che si riesce a ridurre sensibilmente il numero di variabili decisionali e di vincoli coinvolti nel modello.

$$\min E[TC] = \sum_{t=1}^N (a\delta_t + h\tilde{I}_t) \quad (65)$$

s.t.

$$\tilde{I}_0 = 0 \quad (\text{scorte iniziali supposte nulle}) \quad (66)$$

$$\delta_1 = 1 \quad (\text{serve un ordine iniziale}) \quad (67)^3$$

$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} \geq 0 \quad t = 1, \dots, N \quad (68)$$

$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} > 0 \Rightarrow \delta_t = 1 \quad t = 1, \dots, N \quad (69)$$

$$\tilde{I}_t \geq \Phi[t, \max_{j \in [1..t]} j\delta_j] \quad t = 1, \dots, N \quad (70)$$

$$\tilde{I}_t \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}, \delta_t \in \{0,1\} \quad t = 1, \dots, N \quad (71)$$

dove

---

<sup>3</sup> I vincoli (66) e (67) sono stati inseriti per creare una condizione iniziale. Di fatto in presenza di condizioni iniziali differenti si può dimostrare che è comunque sempre possibile riportarsi a questo modello.

$$\Phi[i, j] = G_{d_j+d_{j+1}+\dots+d_i}^{-1}(\alpha) - \sum_{k=j}^i \tilde{d}_k \quad (72)$$

La funzione obiettivo e il primo vincolo dei due modelli MIP e CP sono identici. Il vincolo (69) è equivalente a (60) ma rappresenta un modo più *naturale* per esprimere il concetto.

La difficoltà implicita nel modello MIP risiede nell'esprimere il livello di incertezza accumulata alla fine del periodo  $t$ ,  $t=1, \dots, N$ . È chiaro che l'incertezza accumulata è funzione del tempo che è passato dall'ultimo rifornimento di merci effettuato, ovvero l'ultimo istante in cui sono state controllate le scorte in modo da portarle al livello ottimo. Da notare che la creazione di un meccanismo che punti al periodo relativo all'ordinazione più recente gioca un ruolo chiave nella formulazione MIP. Il modello di Tarim e Kingsman supera questa difficoltà introducendo le variabili decisionali binarie ausiliarie  $P_{ij} \in \{0,1\}$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $j=1, \dots, N$ . Ad ogni modo è possibile ottenere lo stesso risultato con l'approccio applicato nel modello CP proposto, dove vengono sfruttate variabili decisionali indicizzate da altre variabili decisionali; questa tecnica permette di sostituire i vincoli (61), (62) e (63) dal solo vincolo (70); in tal modo si riduce il numero di variabili decisionali a  $2N$  e il numero di vincoli usati a  $3N$ .

Sono riportati da Tarim e Smith in [TS05] i risultati dei test effettuati che mostrano chiaramente l'entità del miglioramento ottenuto grazie alla nuova formulazione: in media tale miglioramento si attesta al 161%, con un picco di 516%. In termini di dimensione dell'albero di ricerca i risultati sono invece opposti: il MIP richiede un albero che in media è tre volte più piccolo di quello richiesto da CP, tuttavia il fatto di dover ad ogni nodo risolvere un rilassamento lineare del problema originario da origine ad un *overhead* che penalizza il MIP in termini di velocità nel trovare la soluzione.

## ***Tecniche di riduzione a priori dello spazio di ricerca per il modello CP***

Al fine di migliorare le prestazioni dei solver nella ricerca di una soluzione ottima per il modello CP presentato in [TS05] vengono presentate due tecniche di riduzione per i domini delle variabili decisionali, che possono essere utilizzate prima di avviare la ricerca in modo da dover esplorare uno spazio ridotto ai soli valori di fatto ammissibili per la particolare istanza considerata. Al contrario della programmazione lineare, dove i domini delle variabili decisionali sono intervalli, nella programmazione a vincoli le variabili decisionali possono avere domini discontinui, contenenti solo un numero finito di valori che possono essere enumerati. Questa proprietà facilita lo sviluppo di efficienti metodi per la riduzione dei domini. Nel seguito si mostra come ogni  $\tilde{I}_t$  possa assumere solo un numero finito di possibili valori; vengono quindi sviluppati due differenti metodi che possono essere usati assieme per ridurre in modo significativo i domini delle variabili decisionali. In particolare tale tecnica permette di ridurre i domini delle  $\tilde{I}_t$ , che inizialmente comprendono tutti numeri reali positivi, ad un set finito di valori.

Vengono nel seguito riportate alcune definizioni presenti in [TS05] che torneranno utili quando verranno descritti i metodi di riduzione.

**Definizione:** *Il ciclo di rifornimento  $T(i, j)$  è l'intervallo temporale che intercorre tra due ordini consecutivi, che si verificano nei periodi  $i$  e  $j+1 \geq i$ .*

**Definizione:** *La scorta di sicurezza relativa ad un ciclo di rifornimento  $b(i, j)$ , indica il minimo livello di scorte richieste per soddisfare un dato livello di servizio durante  $T(i, j)$ .*

L'espressione per il livello minimo delle scorte di sicurezza in un ciclo di rifornimento può essere ricavata dalla formulazione MIP ed in particolare da (61):

$$b(i, j) = G_{d_i+d_{i+1}+\dots+d_j}^{-1}(\alpha) - \sum_{k=i}^j \tilde{d}_k, \quad i = 1, \dots, j \quad j = 1, \dots, N \quad (73)$$

**Definizione:** Il livello di scorte in apertura per un ciclo  $T(i, j)$ , indicato da  $R(i, j)$ , indica il minimo livello in apertura al periodo  $i$  necessario per soddisfare la domanda fino al periodo  $j+1$ :  $R(i, j) = b(i, j) + \sum_{t=i}^j \tilde{d}_t$ .

**Definizione:** Il costo di un ciclo di rifornimento,  $c(i, j)$ , indica il valore atteso del costo per la politica ottima in  $T(i, j)$ .

**Definizione:**  $I_i^S$  indica un set finito di valori che include anche il valore atteso ottimo per il livello di scorte in chiusura nel periodo  $i$ ;  $R_i^S$  indica un set finito di valori che include  $R_i^*$ , ovvero il valore atteso ottimo per le scorte in apertura nel periodo  $i$  o il livello ottimo a cui le scorte devono essere portate in presenza di un ordine in tale periodo.

**Proposizione 1:** In ogni ciclo di rifornimento il livello di scorte di sicurezza è una funzione crescente nel numero di periodi presenti nel ciclo.

**Prova:** per il vincolo sul livello di servizio richiesto  $\Pr\{I_t \geq 0\} \geq \alpha$ ,  $t = i, \dots, j$ , possiamo introdurre il vincolo lineare equivalente,

$R(i, t) \geq G_{d_i+d_{i+1}+\dots+d_t}^{-1}(\alpha)$  dove  $G(\bullet)$  è la funzione di distribuzione cumulativa di  $d_i + d_{i+1} + \dots + d_t$ . Dal momento che la funzione densità di probabilità è una distribuzione normale:

$$R(i, t) \geq z_\alpha \sigma_{d_i+d_{i+1}+\dots+d_t} + \sum_{k=i}^t \tilde{d}_k \quad (74)$$

Il livello ottimo per le scorte di sicurezza,  $b(i, t) = R(i, t) - \sum_{k=i}^t \tilde{d}_k$  è allora:

$$b(i, t) \geq z_\alpha \sigma_{d_i+d_{i+1}+\dots+d_t} \quad (75)$$

cioè una funzione crescente nel numero dei periodi.  $\square$

## Primo metodo di riduzione dei domini

Assumiamo che il periodo  $i$  corrisponda ad un'ordinazione e che il livello di scorte in tale periodo sia minore del più piccolo elemento in  $R_i^S$ . Non è in generale possibile, prima di aver ottenuto la soluzione ottima per un'istanza del problema, determinare la lunghezza del ciclo di rifornimento ottimo per un particolare periodo in cui avviene un'ordinazione; tuttavia è possibile identificare un upper bound per tale lunghezza utilizzando la seguente:

**Proposizione 2:** *Se la condizione seguente è verificata:*

$$\forall k \in \{i, \dots, j-1\} \quad (c(i, k) + c(k+1, j) > c(i, j)) \vee (b(i, k) > R(k+1, j)) \quad (76)$$

*o dualmente se la seguente si verifica:* (76a)

$$\exists k \in \{i, \dots, j\} \quad (c(i, k) + c(k+1, j+1) \leq c(i, j+1)) \wedge (b(i, k) \leq R(k+1, j+1))$$

*allora per il periodo  $i$  il periodo ottimo per il successivo ordine non cadrà dopo  $j$ .*

**Prova:** Sia  $p > j$ . Da

$$c(i, k) + c(k+1, j+1) \leq c(i, j+1),$$

dalla definizione di costo per un ciclo di rifornimento

$$c(\alpha, \beta) = a + h(\beta - \alpha + 1)b(\alpha, \beta) + h \sum_{t=\alpha}^{\beta} (t - \alpha) \tilde{d}_t$$

e dalla **Proposizione 1**, otteniamo:

$$a \leq h \sum_{t=k+1}^{j+1} (k+1-i) \tilde{d}_t$$

ciò implica che:

$$a \leq h \sum_{t=k+1}^p (p-i) \tilde{d}_t$$

utilizzando la **Proposizione 1** e sistemando i termini possiamo scrivere  $c(i, k) + c(k+1, p) \leq c(i, p)$  e siccome  $p > j$ , da  $b(i, k) \leq R(k+1, j+1)$  segue



$b(i, k) \leq R(k + 1, p)$ . Questo mostra che per  $p > j$  esiste una politica di rifornimento a costo minore ottenibile aggiungendo un ordine nel periodo  $k$ . Inoltre  $i \leq p \leq j$  e  $j$  può essere usato come upper bound nella determinazione della lunghezza del ciclo di rifornimento.

Si è mostrato quindi che, per ogni periodo di rifornimento, esiste un upper bound sulla lunghezza di tale ciclo, che può essere determinato incrementando gradualmente il numero di periodi considerati nel ciclo, in pratica un insieme di tutti i valori candidati come *order-up-to-level* (ovvero il livello ottimo di scorte alla fine di ogni periodo) può essere ottenuto sfruttando le due seguenti proposizioni.

**Proposizione 3:** Sotto la condizione specificata nella **Proposizione 2**, per tutti i periodi  $m \in T(i, j)$ ,

$$R_m^* \in R_m^S = \bigcup \{ \tau \mid \tau = R(i, l) - \sum_{t=i}^{m-1} \tilde{d}_t, l = m, \dots, j \} \quad (77)$$

**Prova:** Se  $l$  indica il periodo finale del ciclo ottimo di rifornimento per il periodo  $i$ ,  $\delta_k = 0$ ,  $k = i + 1, \dots, l$ . Allora il livello ottimo di apertura per le scorte nel periodo  $m$ ,  $i \leq m \leq l$ , è  $R(i, l) - \sum_{t=i}^{m-1} \tilde{d}_t$ . Il dominio dei valori possibili,  $R_m^S$ , può essere quindi ottenuto facendo variare il valore di  $l$  da  $m$  a  $j$ .  $\square$

La **Proposizione 2** stabilisce che un ciclo di rifornimento possa coprire la durata  $(i, j)$  in cui:

$$\exists k \in \{i, \dots, j - 1\} \quad (c(i, k) + c(k + 1, j) \leq c(i, j)) \wedge (b(i, k) > R(k + 1, j)) \quad (78)$$

senza un ciclo di rifornimento in  $k$ . Tuttavia possiamo osservare che potrebbe essere una scelta ottima fissare un ordine per il periodo  $k + 1$  andando probabilmente a coprire più periodi, oppure anche fissare un nuovo ordine con

una dimensione attesa pari a zero (quindi un ordine nullo) per il periodo  $k + 1$ ; in quest'ultimo caso infatti si andrebbe a ridurre l'incertezza della domanda per  $k + 1$  e per i periodi successivi, rendendo possibile il mantenimento di scorte di sicurezza più basse: se infatti fissiamo un ordine in  $k + 1$ , dal momento che stiamo utilizzando una politica (R,S), sarà sempre possibile in  $k + 1$  riportare le scorte al livello ottimo a fronte di domande effettive che superano il valore atteso. Queste due situazioni e i loro effetti su  $R_m^S, m \geq k + 1$  vengono presi in considerazione dalla **Proposizione 4**.

**Proposizione 4:** Se  $\exists k \in \{i, \dots, j - 1\}$ ,  $c(i, k) + c(k + 1, j) \leq c(i, j) \wedge b(i, k) > R(k + 1, j)$  (vedi figura 1a) allora, dal momento che la politica di rifornimento si aspetterebbe un ordine negativo e dunque sarebbe non ammissibile, nella politica ottima esistono due alternative:

1. fissare un nuovo ordine per il periodo  $k + 1$  e coprire probabilmente più periodi (vedi figura 1b):

$$R_{m|m \in \{k+1, \dots, \min(l)\}}^S + = \cup \{ \tau \mid \tau = R(k + 1, \min(l)) - \sum_{t=k+1}^{m-1} \tilde{d}_t \} \quad (79)$$

dove  $l$  è soggetto a  $b(k + 1, l) + \sum_{t=k+1}^l \tilde{d}_t \geq b(i, k)$

2. fissare un nuovo ordine con dimensione attesa del lotto pari a zero per il periodo  $k + 1$  (vedi figura 1c):

$$R_{m|m \in \{k+1, \dots, \max(l)\}}^S + = \cup \{ \tau \mid \tau = R(k + 1, \max(l)) - \sum_{t=k+1}^{m-1} \tilde{d}_t \} \quad (80)$$

dove  $l$  è soggetto a  $b(k + 1, l) + \sum_{t=k+1}^l \tilde{d}_t \leq b(i, k)$

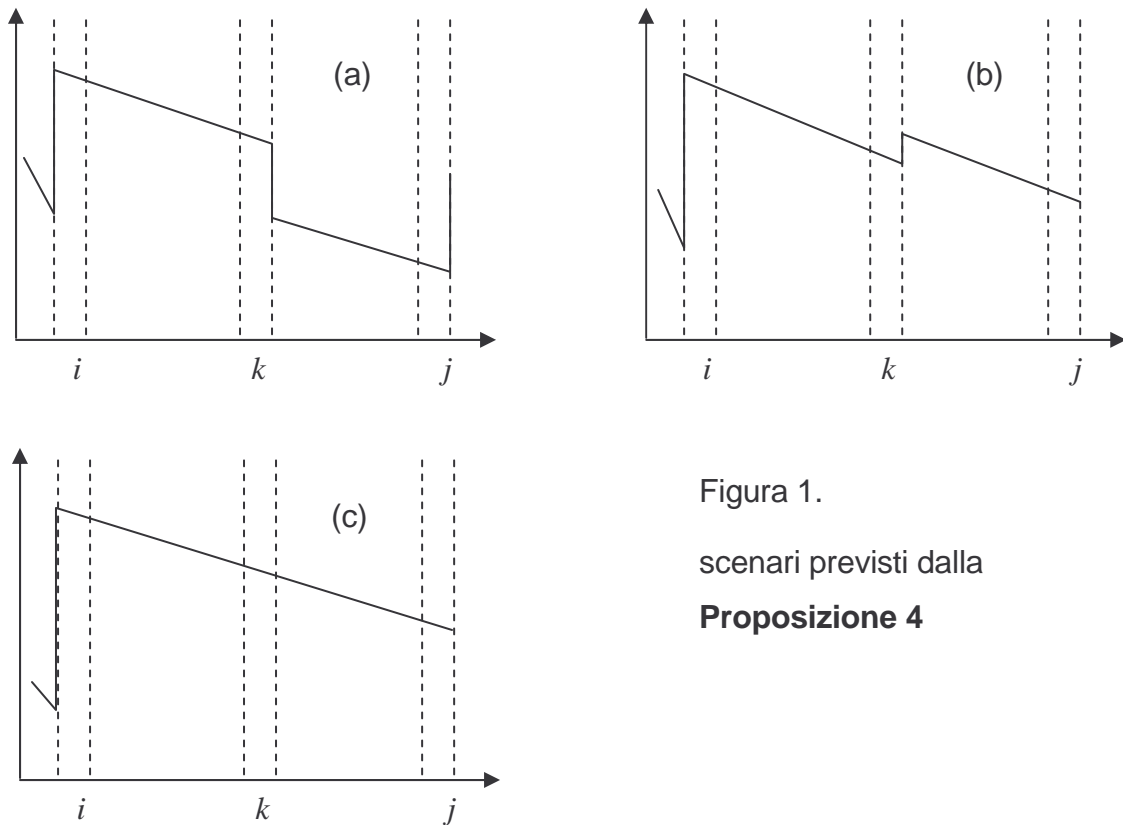


Figura 1.  
scenari previsti dalla  
**Proposizione 4**

**Prova:** (caso 1) Si ipotizzi che gli alti livelli di scorte portate avanti dal periodo  $k$  soddisfino il vincolo sul livello di servizio per  $s-1$  periodi consecutivi. Allora le scorte rimanenti non saranno abbastanza per soddisfare questo vincolo per il periodo  $s$ . Per essere sicuri di rispettare il vincolo nel periodo  $s$  la quantità da ordinare deve essere almeno  $b(k+1, s) + \sum_{t=k+1}^s \tilde{d}_t - b(i, k)$ . Dunque questo ordine coprirà i periodi fino ad  $s$ , dove  $s = \min(l)$  tale che  $b(k+1, l) + \sum_{t=k+1}^l \tilde{d}_t \geq b(i, k)$ .

(caso 2) in modo simile,  $s-1 = \max(l)$  tale che  $b(k+1, l) + \sum_{t=k+1}^l \tilde{d}_t \leq b(i, k)$ .  $\square$

Utilizzando queste due proposizioni è possibile ridurre a priori in modo significativo i domini delle variabili decisionali  $R_i^s$ ,  $i=1, \dots, N$  per mezzo delle proprietà illustrate. È chiaro che  $I_i^s, i=1, \dots, N$  potrà essere costruito sottraendo  $\tilde{d}_i$  da ogni elemento di  $R_i^s$ . È stato mostrato da Wagner e Whitin [WW58] che nel caso deterministico la politica ottima è quella in cui si rispettano all'uguaglianza le richieste nei vari periodi (da loro chiamata politica *exact requirement*), tale politica

è completamente specificata dai periodi in cui gli ordini vengono fissati. Ad ogni modo è necessario osservare che nel caso stocastico, anche se vengono escluse le scorte di sicurezza, la politica ottima potrebbe non essere quella che soddisfa esattamente la domanda.

### **Secondo metodo di riduzione dei domini**

Il primo metodo di riduzione dei domini illustrato presenta delle debolezze, in particolare il problema maggiore viene dal fatto che si assume il livello di scorte iniziale per ogni rifornimento pari a zero. Questa scelta ignora il fatto che le scorte in chiusura portate avanti dal periodo precedente potrebbero essere abbastanza grandi da escludere alcuni valori di *order-up-to-level* (livelli di scorte ottimali) dai rispettivi domini. Viene quindi proposto in [TS05] un secondo metodo di riduzione per risolvere tale problema.

Tale metodo di riduzione è invocato con  $I_0^S = \{0\}$ ,  $I_{i=1,\dots,N}^S = 0$  e  $R_{i=1,\dots,N}^S = 0$ . L'algoritmo prende in considerazione ad ogni passo solo i livelli di chiusura, che indicheremo con  $j$ , delle scorte disponibili in  $I_{i-1}^S$  e tenta due differenti scenari:  $Q_{zero}(i, j)$  e  $Q_{pos}(i, j)$ . Il primo scenario considera il caso in cui nessun nuovo ordine viene fissato (o la quantità ordinata è pari a zero se invece l'ordine è fissato) e la domanda per il periodo  $i$  viene soddisfatta grazie alle scorte iniziali già presenti:  $j$ . Il secondo scenario considera invece la situazione in cui un ordine viene fissato per aumentare il livello di scorte iniziali in  $i$ . Gli effetti di tali azioni vengono poi riflesse sui domini in cui sono presenti i possibili valori per i livelli di apertura e chiusura delle scorte. È possibile trovare lo pseudo-codice delle due procedure in [TS05], p.15.

**Proposizione 5:** Se  $I_i^{S_1}$  e  $I_i^{S_2}$  sono i livelli di chiusura delle scorte prodotti rispettivamente dal metodo di riduzione 1 e dal metodo di riduzione 2, allora il valore ottimo per  $\tilde{I}_i, \tilde{I}_i^*$ , potrà essere trovato nell'insieme  $I_i^{S_1} \cap I_i^{S_2}$ .

**Prova:** banalmente segue dal fatto che  $\tilde{I}_i^* \in I_i^{S_1}$  e  $\tilde{I}_i^* \in I_i^{S_2}$   $\square$

In [TS05] è anche riportato un interessante esempio su un'istanza di piccole dimensioni che mostra l'efficacia dei due metodi di riduzione presentati. Anche i risultati dei test proposti in [TS05] confermano l'efficacia dei due metodi qui illustrati.

Rilevante è, infine, un'evidenza sperimentale che si è osservata nei test effettuati su Choco [OCRE]: tale solver, come verrà spiegato in seguito, integra al suo interno un motore di propagazione in grado di mantenere l'arc-consistenza durante la ricerca sfruttando la strategia MAC-DB [JDB00]. Proprio il mantenimento dell'arc-consistenza nella gestione dei domini delle variabili decisionali ha messo in luce come una propagazione effettuata dopo la riduzione a priori che si ottiene mediante il primo metodo illustrato in [TS05], porti allo stesso risultato ottenibile sfruttando la **Proposizione 5**, dunque tramite l'intersezione tra i domini ridotti con il primo e il secondo metodo che sono stati presentati. Sembra quindi dai dati sperimentali ottenuti, che il secondo metodo illustrato in [TS05] sia ridondante in presenza di un solver che implementi l'algoritmo MAC-DB.

### Esempio Numerico

Per illustrare in termini pratici la tecnica di riduzione viene presentato un semplice esempio numerico:

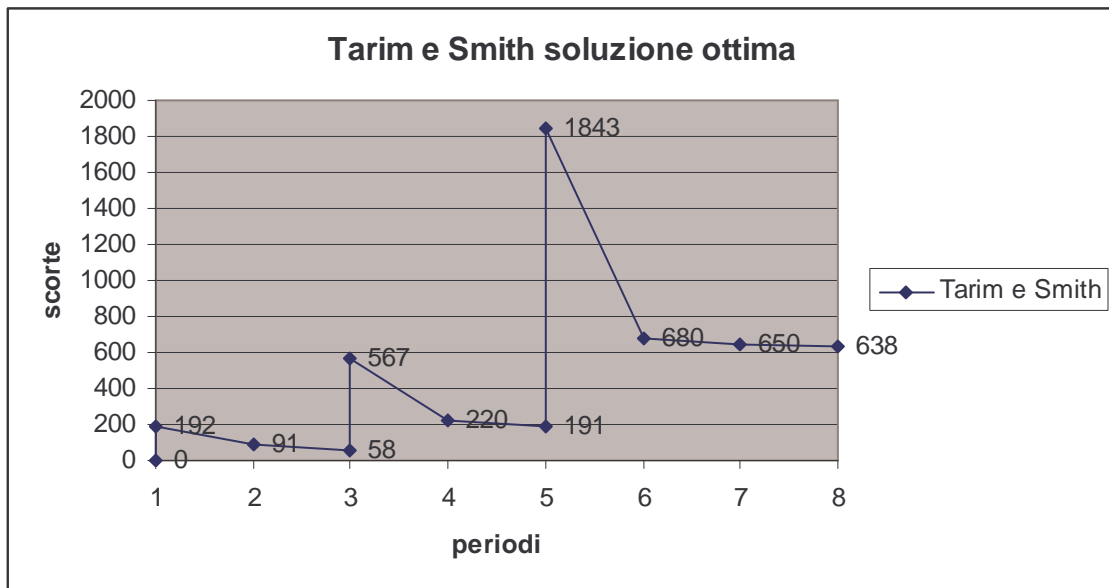
Previsioni per la domanda:

Periodo	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{d}_t$	101	33	347	29	1163	30	12

il livello iniziale delle scorte è fissato a zero. Si assume che la domanda sia distribuita normalmente in ogni periodo con un coefficiente di variazione  $\sigma/\mu = 1/3$  costante. Gli altri parametri del problema sono  $a = 500$  per ordine,

$h = 1$  per unità per periodo, e  $\alpha = 0.95$  ( $z_{\alpha=0.95} = 1.645$ ). Nella seguente tabella sono illustrati i domini ridotti per i due metodi DR1 e DR2, i domini ridotti che si ottengono dall'intersezione di tali risultati e infine il valore ottimo per le scorte in chiusura in ogni periodo, ottenuto risolvendo il problema.

$i$	$I_i^{S_I}$	$I_i^{S_{II}}$	$I_i^{S_I} \cap I_i^{S_{II}}$	$\tilde{I}_i^*$
1	{55,91}	{55,91}	{55,91}	91
2	{18,22,58}	{22,58,538,568}	{22,58}	58
3	{190,220}	{190,191,220,221,1858,1888,1900}	{190,220}	220
4	{16,161,191}	{161,162,191,192,1801,1829,1831,1843,1859,1871}	{161,191}	191
5	{638,668,680}	{638,666,668,680,696,708}	{638,668,680}	680
6	{16,30,608,638,650}	{608,636,638,650,666,678}	{608,638,650}	650
7	{7,18,596,626,638}	{596,624,626,638,654,666}	{596,626,638}	638



## ***Riduzione dinamica dello spazio di ricerca per il modello CP***

Le tecniche di riduzione mostrate nell'articolo [TS05] sono tecniche statiche, esse vengono applicate ai domini prima che venga iniziata l'esplorazione dell'albero di ricerca da parte del solver. Le considerazioni fatte nelle varie proposizioni presentate suggeriscono tuttavia la possibilità di estendere tali teoremi anche al caso dinamico, permettendo così al solver di ridurre ulteriormente i domini delle variabili decisionali durante la ricerca, man mano che nuovi assegnamenti vengono imposti sui vari nodi. A tal fine sono state proposte due estensioni dinamiche per ciascuno dei due metodi statici di riduzione presentati e un'ulteriore tecnica basata su un rilassamento del problema risolto mediante la programmazione dinamica; questa ultima tecnica offre buoni lower bound utilizzabili in una strategia di branch and relax [H05]. Basando il loro codice su tali tecniche, sono stati prodotti tre vincoli globali. Questi vincoli possono essere aggiunti al modello CP; durante la ricerca si occupano di monitorare lo stato degli assegnamenti correnti e di ridurre ulteriormente i domini delle variabili non assegnate o di fornire, nel caso del terzo vincolo, al solver dei buoni lower bound, che permettono di attivare il backtracking nel caso in cui una soluzione migliore del lower bound corrente sia già stata trovata, evitando dunque di esplorare alcune regioni dello spazio di ricerca. I test condotti hanno confermato l'efficacia di ciascuno dei tre vincoli, e hanno anche mostrato che sebbene sia possibile utilizzarli separatamente nel modello, le prestazioni migliori si ottengono quando tutti e tre i vincoli vengono aggiunti ad esso.

Introduciamo immediatamente un lemma che risulterà utile nel seguito: più volte verrà infatti richiesto di considerare una data soluzione parziale che sia parte di una politica ottima per i rifornimenti, ciò è sempre possibile in base a quanto stabilito dal seguente

**Lemma (soluzione parziale):** *È sempre possibile trovare una certa soluzione parziale che sia parte di una politica ottima per i rifornimenti rispetto all'istanza considerata.*

**Prova:** L'albero di ricerca utilizzato dal solver ha una profondità che è pari al numero di variabili decisionali per l'istanza del problema considerata. Per ogni

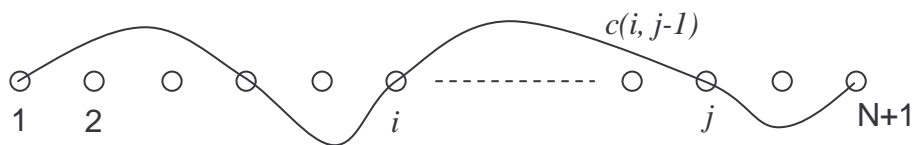
set di domande esiste sempre una soluzione ammissibile (e dunque anche una ottima): infatti la politica che prevede di fissare un ordine in ogni periodo è sempre ammissibile, anche se quasi sempre non ottima. La soluzione ottima può dunque essere vista come un percorso dal nodo radice ad una certa foglia nell'albero decisionale considerato per l'istanza data. Questo percorso tocca  $N$  nodi (uno per ogni livello nell'albero di ricerca: dove ogni nodo rappresenta l'assegnazione di una variabile decisionale ad un certo valore) , dunque ad ogni livello è possibile trovare almeno un nodo, dal quale il cammino verso il nodo radice rappresenta una soluzione parziale che è parte di una politica ottima.



## Rilassamento del modello risolto mediante dynamic programming e sfruttato per attuare una strategia branch and relax

Il primo dei tre vincoli presentati non prende le mosse dalle tecniche già presentate. Nei capitoli precedenti così come in tutta la letteratura riguardate il problema che stiamo trattando si è più volte parlato di programmazione dinamica [B57]. Ancora una volta un algoritmo di programmazione dinamica torna utile nella determinazione di una politica ottima per il rifornimento: è possibile osservare come il problema della determinazione di tale politica mediante il modello CP fornito non sia altro che una versione sovravincolata del problema dell'identificazione del cammino a costo minimo tra due punti in un grafo.

Il grafo da noi preso in considerazione avrà infatti  $N+1$  nodi e sarà non densamente connesso: nella figura seguente non vengono indicate tutte le possibili connessioni, ma solo il cammino ottimo.



Ogni arco  $(i, j)$   $i, j \in [1 \dots N+1]$  rappresenterà un possibile ciclo di rifornimento  $T(i, j-1)$  e sarà caratterizzato da un costo dato da  $c(i, j-1)$  già definito in precedenza. Il problema sarà dunque quello di trovare il percorso a costo minimo dal nodo 1 al nodo  $N+1$ , vogliamo infatti una politica ottima di rifornimento fino all'orizzonte degli eventi, quindi ci servono  $N$  archi; i nodi toccati da tale percorso identificheranno i periodi in cui effettuare gli ordini nella politica ottima. È possibile definire il rilassamento per eliminazione del problema originale, dove i vincoli (68) e (70) vengono eliminati, fornendo la seguente matrice  $(N+1) \times (N+1)$  di connessione del grafo:

	$j$				
	$\infty$	$c(1,1)$	-----	$c(1, j-1)$	$c(1, N)$
$i$	$\infty$	$\infty$	$c(i, j-2)$	$c(i, j-1)$	$c(i, N)$
	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$c(i+1, j-1)$	⋮
	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$c(N, N)$
	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$\longleftarrow N+1 \longrightarrow$				$\uparrow$ $N+1$ $\downarrow$

In sostanza una matrice di connessione triangolare superiore dove impediamo transizioni da un nodo con etichetta  $i$  ad un nodo con etichetta  $j$  se  $j \leq i$  e dove altrimenti assegniamo un costo di connessione in accordo con il modello CP per il problema. In tal modo abbiamo definito un nuovo modello SPP: è infatti noto che un'istanza per SPP è univocamente definita una volta che sia fornita la matrice di connessione che descrive i costi tra i vari nodi del grafo. Si noti che il rilassamento per eliminazione coinvolge, come già accennato, il vincolo (70) sui livelli di servizio da garantire e il vincolo di ammissibilità tra i livelli di scorte nei vari periodi (68), necessario in quanto non sono ammessi ordini negativi, quindi nel problema originale le scorte in un periodo  $t$  dovranno sempre essere minori o uguali alle scorte in  $t+1$ . Una volta costruito il problema rilassato lo si può risolvere con una versione speciale, che tenga conto cioè dei cammini non ammessi, dell'algoritmo di Dijkstra per SPP in  $N \cdot (N+1)/2$  passi se  $N$  è il numero dei nodi del grafo. Trovata la soluzione ottima per SPP potremo verificarne l'ammissibilità per il problema originale in modo combinatorio (verificando che tutti i vincoli rilassati non siano violati), infatti avendo fissato tutti i  $\delta_i, i \in [1..N]$  ricavati dalla soluzione del rilassamento anche tutti gli  $I_i, i \in [1..N]$  risulteranno fissati nel modello CP. Ovviamente potremo riscontrare due casi:

1. Il problema rilassato offre una soluzione ammissibile per il problema originale.
2. La soluzione trovata, che ha costo  $C_o$ , non è ammissibile per il problema originale, in questo caso il suo valore è un lower bound per tale problema.

**Prova:** infatti la soluzione ottima per il problema non rilassato sarà un cammino sub-ottimale per SSP con costo  $C_s$ , segue quindi che  $C_s \geq C_o$   $\square$

Abbiamo dunque descritto come ricavare e risolvere il problema rilassato, non è tuttavia ancora stato specificato come integrare questo rilassamento in modo dinamico all'interno della ricerca. Introduciamo quindi le proposizioni che descrivono il processo.

Una prima proposizione spiega come agire in presenza di variabili decisionali  $\delta_i$ ,  $i \in [1...N]$  già assegnate al valore 0.

**Proposizione 6:** *Se si è scelto di non fissare un rifornimento per il periodo  $k$ ,  $\delta_k = 0$ , qualora si voglia applicare il rilassamento per eliminazione che porta al modello per SPP, nella costruzione della matrice di connessione tutti gli archi entranti nel nodo  $k$  e tutti gli archi uscenti da esso dovranno avere costo  $\infty$ .*

**Prova:** Siccome  $\delta_k = 0$ , i cammini ottimi (se più di uno) rispetto a tale scelta certamente non passeranno per il nodo  $k$ , infatti è stato detto che la soluzione data da SPP conterrà tutti e solo i nodi in cui dovranno essere fissati gli ordini in una politica ottima per i rifornimenti, dunque possiamo rendere impossibili transizioni da/verso tale nodo.  $\square$

Consideriamo poi invece cosa accade in presenza di variabili  $\delta_k$ ,  $k \in [1...N]$  già assegnate al valore 1.

**Proposizione 7:** *Se fissare un rifornimento per il periodo  $k$ ,  $\delta_k = 1$ , è una scelta che è parte della politica di rifornimenti ottima per l'istanza considerata, quindi:*

$$c(i, k-1) + c(k, j) \leq c(i, j) \quad (\alpha)$$

dividendo l'intervallo temporale in  $k$  e risolvendo separatamente i due sottoproblemi  $[i..k-1]$  e  $[k..j]$  per mezzo della programmazione dinamica applicata al loro rilassamento per eliminazione, potremo ottenere tre possibili casi:

1. Uno dei due sottoproblemi (o entrambi) porta ad una soluzione parziale non ammissibile, il valore complessivo  $C$  dato dalla somma dei valori delle due soluzioni parziali è un lower bound, relativo alla scelta  $\delta_k = 1$ , per il valore della soluzione ottima per il problema originale nell'intervallo  $[i..j]$ .

**Prova:** si è già mostrato che, se una soluzione trovata per mezzo della programmazione dinamica si rivela non ammissibile, essa darà un lower bound per il problema originale, l'estensione a questo caso è banale, se infatti un sottoproblema è non ammissibile allora il costo totale  $C$  sarà dato dalle due componenti  $C_{[i..k-1]}$  e  $C_{[k..j]}$ ; se si suppone sia il sottoproblema  $[k..j]$  ad essere non ammissibile, allora (come già dimostrato)  $C_{[k..j]} \leq C_{[k..j]}^*$ , dove  $C_{[k..j]}^*$  è il valore di una soluzione parziale ammissibile e ottima per l'intervallo  $[k..j]$ , dunque

$$C = C_{[i..k-1]} + C_{[k..j]} \leq C_{[i..k-1]} + C_{[k..j]}^* = C^*$$

con  $C^*$  valore della soluzione ottima e ammissibile per  $[i..j]$ , il valore ottenuto è quindi un lower bound per  $C^*$ .  $\square$

2. ( $\beta$ )  $b(i, k-1) \leq R(k, j) \Rightarrow$  i due sottoproblemi sono **indipendenti** e possono essere risolti separatamente, la soluzione ottenuta concatenando le due soluzioni parziali ottenute (supposte entrambe ammissibili) mediante il rilassamento per eliminazione è **ammissibile** e **ottima**.

**Prova (ammissibilità):** i due sottoproblemi, di fatto, sono ottenuti anch'essi per mezzo di un rilassamento per eliminazione, in quanto con la

separazione si è fatto venir meno il vincolo nel gruppo (68) che lega il livello di chiusura delle scorte in  $k-1$  con il livello di apertura in  $k$ . Se la condizione  $(\beta)$  è soddisfatta il vincolo che è stato rilassato dividendo gli intervalli è di fatto non violato; inoltre, dal momento che entrambi i due sottoproblemi sono ammissibili, tutti i vincoli che sono stati eventualmente rilassati risultano pertanto comunque rispettati, dunque la soluzione ottenuta concatenando le due soluzioni parziali è anch'essa ammissibile.  $\square$

**Prova (ottimalità):** dal noto teorema<sup>4</sup> sul cammino a costo minimo segue che la soluzione trovata è ottima per SPP, infatti è data dal cammino a costo minimo dal nodo  $i$  al nodo  $k$  concatenato al cammino a costo minimo dal nodo  $k$  al nodo  $j$ . Tale soluzione, essendo ammissibile per il problema originale, è quindi anche ottima per il problema originale di cui SPP è il rilassamento, non può infatti esistere una politica a costo minore di quella trovata.  $\square$

3.  $(\gamma) \quad b(i, k-1) > R(k, j) \Rightarrow$  i due sottoproblemi sono **dipendenti** e non possono essere risolti separatamente, il valore  $C$  ottenuto sommando i valori delle due soluzioni parziali ottenute per i due sottoproblemi è un lower bound per il problema originale.

**Prova:** dal momento che  $(\gamma)$  è soddisfatto, e dunque non lo è  $(\beta)$ , la soluzione del rilassamento ottenuto eliminando il vincolo nel gruppo (68) che lega il livello di chiusura delle scorte in  $k-1$  con il livello di apertura in  $k$  non è ammissibile per il problema originale. La soluzione ottima e ammissibile per il problema originale sarà dunque un cammino sub-ottimale rispetto al rilassamento SPP effettuato; per ipotesi infatti il cammino

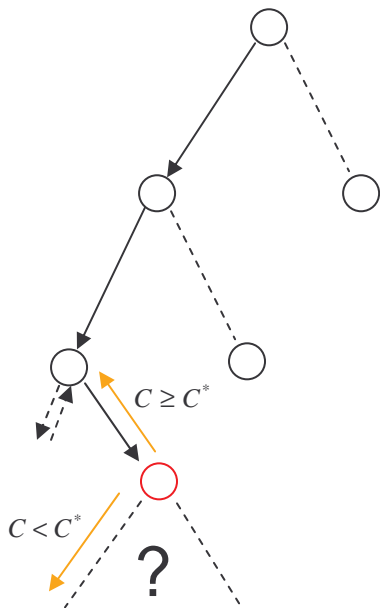
---

<sup>4</sup> **Teorema:** Se  $p$  è un cammino minimo da  $u$  a  $v$ , allora ogni sotto-cammino di  $p$  è anche un cammino minimo.

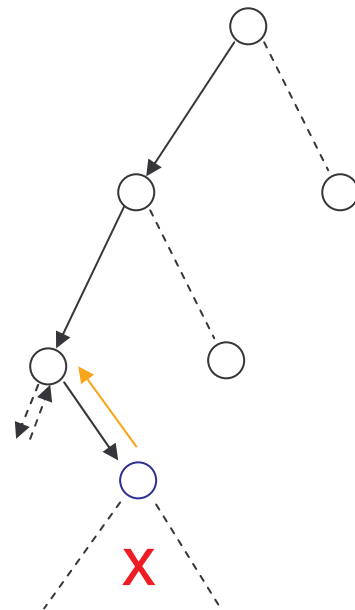
**Dim:** Considera un sotto-cammino di  $p$  da  $x$  a  $y$ . Se esistesse un cammino da  $x$  a  $y$  più corto, allora ci sarebbe un cammino più corto da  $u$  a  $v$ .

ottimo deve passare per  $k$  ( $\delta_k = 1$  è parte della politica ottima) dunque il costo  $C^*$  di tale politica sarà sicuramente maggiore di quello dato dalla somma di  $C_{[i..k-1]}$  e  $C_{[k..j]}$ , rispettivamente valore del cammino a costo minimo dal nodo  $i$  al nodo  $k$  e valore del cammino a costo minimo dal nodo  $k$  al nodo  $j$ .  $\square$

Abbiamo dunque stabilito il comportamento a fronte dei due casi possibili:  $\delta_i = 0$  oppure  $\delta_i = 1$ ; è possibile ora in un qualsiasi punto della ricerca nell'albero decisionale applicare il rilassamento illustrato ottenendo un lower bound per il nodo considerato oppure direttamente una soluzione ammissibile e altresì ottima rispetto al sottoalbero che ha come radice il nodo considerato, che dunque non dovrà essere esplorato.



Il rilassamento produce una soluzione non ammissibile con costo  $C \rightarrow$  abbiamo un lower bound per il nodo, che dovrà essere confrontato con la soluzione migliore  $C^*$  trovata fin'ora per decidere se effettuare il pruning del sottoalbero



Il rilassamento produce una soluzione ammissibile  $\rightarrow$  abbiamo la soluzione ottima rispetto al sottoalbero che ha come radice il nodo, non è dunque necessario esplorare tale sottoalbero

### **Tecnica di riduzione dinamica dei domini basata sull'unione di periodi adiacenti in cui non siano stati fissati degli ordini**

Questa tecnica dinamica di riduzione descrive come ottenere un problema ridotto a partire dal problema originale, ovvero una lista di domande attese nell'intervallo  $[1..N]$ , e da una soluzione parziale in cui almeno una variabile decisionale  $\delta_i$ ,  $i \in [1..N]$  sia stata assegnata al valore 0. Il problema ridotto sarà costituito da una lista di lunghezza  $M < N$  di valori attesi per le domande nei vari periodi e da una seconda lista della stessa lunghezza contenente le relative deviazioni standard. A tale problema ridotto sarà possibile applicare entrambi i metodi di riduzione descritti in [TS05] e già illustrati. I valori presenti nei domini ridotti ottenuti potranno essere poi utilizzati per ricostruire i domini ridotti per le variabili decisionali del problema originale, in modo tale che questi tengano conto degli assegnamenti già effettuati nella soluzione parziale considerata. Introduciamo quindi la seguente proposizione, relativa alla possibilità di accorpare periodi in presenza di assegnamenti al valore zero per le variabili decisionali  $\delta_i$ .

**Proposizione 8:** *Se non fissare ordini nei periodi  $[i+1..j]$  è una scelta che è parte della politica ottima per l'istanza considerata, dunque se  $\delta_k = 0$  per  $k \in [i+1..j]$ , e se  $\delta_i = 1 \vee \delta_i \in \{0,1\}$  (ovvero se  $\delta_i$  non è stata ancora assegnata o è stata assegnata ad 1), allora i periodi  $[i..j]$  possono essere accorpati per creare un nuovo periodo  $k' = [i..j]$  che copre tale intervallo e ha una domanda attesa pari a:*

$$\mu_{k'} = \sum_{t=i}^j \mu_t \quad (81)$$

con deviazione standard per la domanda:

$$\sigma_{k'} = \sqrt{\sum_{t=i}^j \sigma_t^2} \quad (82)$$

**Prova:** Dal momento che non stiamo fissando ordini nei periodi  $[i+1..j]$ , il ciclo di rifornimento  $T(h, g)$  che conterrà tali periodi avrà una lunghezza almeno pari a  $j-i > 0$  periodi: infatti, per definizione, all'inizio di un ciclo di rifornimento dobbiamo avere un ordine, dunque questo ordine potrà essere fissato nel periodo  $i$  o prima di esso. Per la stessa ragione nessun ciclo di rifornimento potrà iniziare in uno dei periodi dell'intervallo  $[i+1..j]$ , dato che non sono fissati ordini in tali periodi. Inoltre, non avendo fatto assunzioni su ciò che avviene dopo il periodo  $j$ , tale ciclo potrebbe risultare di fatto più lungo se  $\exists k \mid k = j+1 \wedge \delta_k = 0$ . Siamo comunque certi che i periodi  $[i..j]$  necessariamente si troveranno nello stesso ciclo di rifornimento  $T(h, g)$ ,  $h \leq i$ ,  $g \geq j$ . Ne segue che possiamo descrivere l'intervallo  $[i..j]$  come un singolo periodo  $k'$  nel quale si realizza l'eventuale ordine, se  $h = i$ , e tutta la domanda: infatti può verificarsi al più un ordine nell'intervallo, in particolare nel periodo iniziale  $i$ . È possibile calcolare il valore atteso per la domanda complessiva  $\mu_{k'}$  in tale nuovo periodo  $k'$  e la sua deviazione standard  $\sigma_{k'}$  sfruttando le proprietà della distribuzione normale.  $\square$

Stabilito che è possibile, grazie alla **Proposizione 8**, accorpare periodi ed ottenere una rappresentazione ridotta per le domande attese e per le loro deviazioni standard in presenza di una soluzione parziale, possiamo dunque applicare le due tecniche di riduzione mostrate in [TS05] a questo problema ridotto ed ottenere, come già spiegato, gli  $I_k^{S_1}$  e gli  $I_k^{S_2}$  con  $k \in [1..M]$  ed  $M < N$ , dove  $N$  è la lunghezza del sottoproblema originale. Ottenuti i domini ridotti  $I_k^{S_l}$ ,  $l \in \{1,2\}$  e  $k \in [1..M]$  per il sottoproblema con i periodi accorpati, i livelli di scorta alla chiusura per ogni periodo  $p$  generato accorpendo più periodi del problema originale di fatto sarà equivalente ai livelli di chiusura delle scorte per  $j$ , cioè l'ultimo dei periodi accorpati in  $p$  se  $[i..j] \subseteq p$ . È possibile quindi ricostruire i domini ridotti per gli altri periodi del sottoproblema originale che sono stati



accorpati in  $p$  ricordando che, per  $i \leq t < j$ , il livello di scorte alla chiusura è ovviamente

$$I_t = I_j + d_{t+1} + d_{t+2} + \dots + d_j \quad (82a)$$

usando tale formula è possibile calcolare tutti i restanti valori, per poi ricavare l'intersezione tra i due metodi come spiegato nella **Proposizione 5**.

Anche in questo caso, come già osservato nella riduzione a priori dei domini, il mantenimento dell'arc-consistenza durante la ricerca permette di evitare l'uso del secondo metodo di riduzione in [TS05] e della **Proposizione 5**, in quanto la riduzione apportata dal primo metodo, assieme agli effetti dell'algoritmo MAC-DB durante la ricerca, sperimentalmente hanno prodotto risultati equivalenti.

#### *Esempio numerico*

Per illustrare in termini pratici la tecnica di riduzione dinamica viene presentato un semplice esempio numerico:

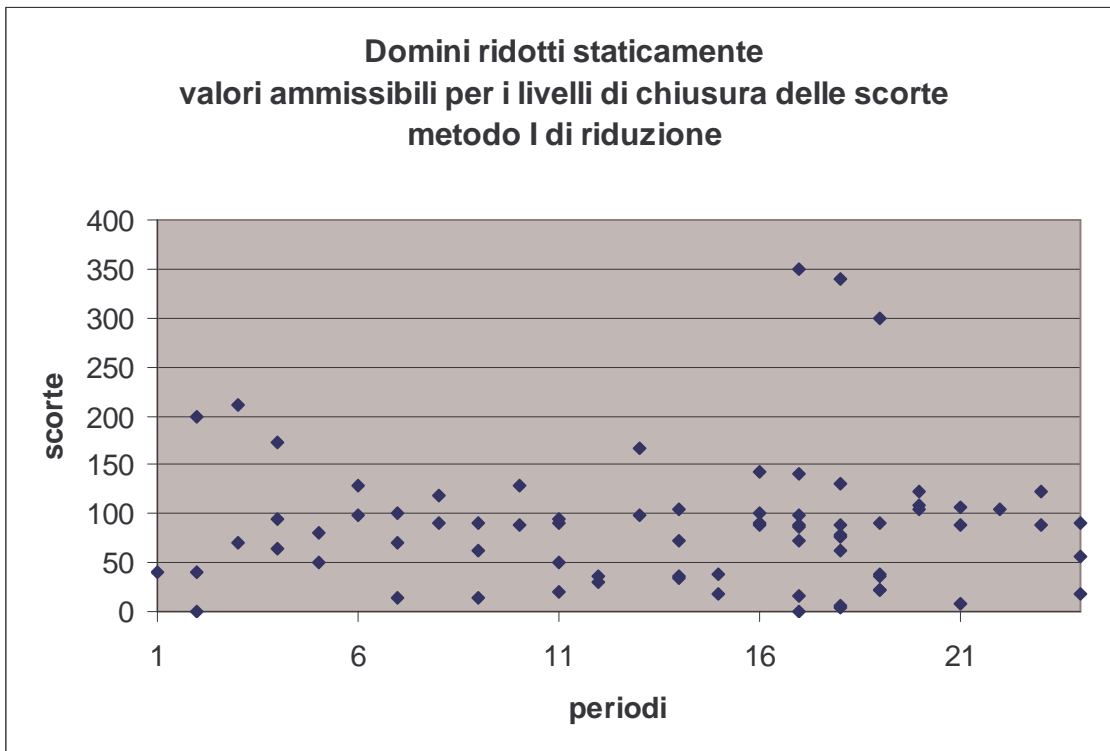
Previsioni per la domanda:

Periodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\bar{d}_t$	73	0	128	116	92	180	28	164	28	161	37	57
Periodo	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\bar{d}_t$	181	62	34	161	2	10	40	192	17	190	163	32

il livello iniziale delle scorte è fissato a zero. Si assume che la domanda sia distribuita normalmente in ogni periodo con un coefficiente di variazione  $\sigma/\mu = 1/3$  costante. Gli altri parametri del problema sono  $a = 200$  per ordine,  $h = 1$  per unità per periodo, e  $\alpha = 0.95$  ( $z_{\alpha=0.95} = 1.645$ ).

I domini ridotti staticamente con il primo metodo presentato (l'esempio per semplicità si riferisce solo al metodo I nel caso dinamico) vengono illustrati nella prima colonna della seguente tabella:

$i$	$I_i^{S_I}$	$i$	$I_i^{S_I}$
1	{40 }	13	{99,167 }
2	{0,40,198 }	14	{34,37,73,105 }
3	{70,211 }	15	{19,39 }
4	{64,95,173 }	16	{88,90,100,143 }
5	{50,81 }	17	{1,16,73,86,88,98,141,350 }
6	{99,128 }	18	{5,6,63,76,78,88,131,340 }
7	{15,71,100 }	19	{22,23,36,38,91,300 }
8	{90,119 }	20	{105,108,123 }
9	{15,62,91 }	21	{9,88,106 }
10	{88,128 }	22	{104 }
11	{20,51,91,94 }	23	{89,123 }
12	{31,37 }	24	{18,57,91 }



La soluzione ottima per questi domini ridotti ottenuta senza alcuna riduzione dinamica è

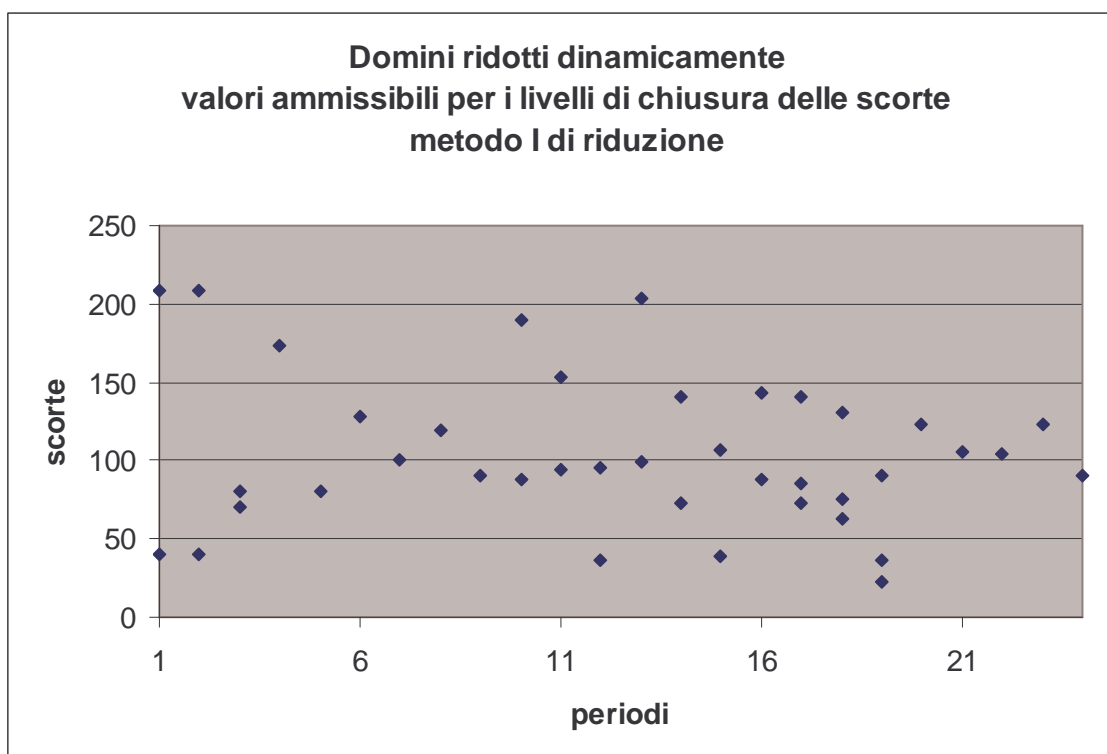
$i$	$I_i^*$	$\delta_i$	$i$	$I_i^*$	$\delta_i$
1	40	1	13	99	1
2	40	0	14	73	1
3	70	1	15	39	0
4	173	1	16	88	1
5	81	0	17	86	1
6	128	1	18	76	0
7	100	0	19	36	0
8	119	1	20	123	1
9	91	0	21	106	0
10	88	1	22	104	1
11	94	1	23	123	1
12	37	0	24	91	0

ovviamente non è questa la sequenza corretta delle azioni nel metodo di riduzione vero e proprio, ma al fine di dimostrarne l'efficacia, dunque a scopo puramente didattico, seguiremo il seguente schema: data la soluzione ottima, conosciamo il valore di tutte le  $\delta_i$ , possiamo quindi fissare tutte le posizioni per gli zeri in soluzione, lasciando invece i  $\delta_i$  che sappiamo essere assegnati ad 1 nella soluzione ottima non assegnati. Questa soluzione parziale di partenza è ovviamente molto favorevole: parecchi periodi verranno accorpati in seguito al *merging lemma*; ci permette dunque di testare l'efficacia del metodo.

Ricaviamo ora i valori per le domande attese e i relativi valori della varianza rispetto alla soluzione descritta con gli zeri noti fissati, applicando il *merging lemma*; poi applichiamo il metodo di riduzione a tale set ridotto di domande.

$i^*$	$\overline{d_{i^*}}$	$(\sigma_{i^*} / \text{coeff. var.})^2$	$I_{i^*}^*$
{1,2}	73	5329	{ <u>40</u> ,209}
{3}	128	16384	{ <u>70</u> ,81}
{4,5}	208	21920	{ <u>81</u> }
{6,7}	208	33184	{ <u>100</u> }
{8,9}	192	27680	{ <u>91</u> }
{10}	161	25921	{ <u>88</u> ,190}
{11,12}	94	4618	{ <u>37</u> ,96}

{13}	181	32761	<u>{99,203}</u>
{14,15}	96	5000	<u>{39,107}</u>
{16}	161	25921	<u>{88,143}</u>
{17,18,19}	52	1704	<u>{23,36,91}</u>
{20,21}	209	37153	<u>{106}</u>
{22}	190	36100	<u>{104}</u>
{23,24}	195	27593	<u>{91}</u>



i valori sottolineati in tabella sono quelli che andranno a comporre la soluzione ottima, ovvero quelli che compariranno in tale soluzione come valori di chiusura delle scorte per l'ultimo periodo di ogni intervallo  $i^*$ , dunque nel caso {1,2}, 40 sarà il livello di chiusura delle scorte per il periodo 2 nella soluzione ottima; ovviamente il livello di chiusura del periodo 1 potrà banalmente essere ottenuto applicando l'equazione (82a), ovvero sommando ad  $I_{\{1,2\}}^*$  la domanda attesa per il periodo 2  $\rightarrow 40 + 0 = 40$ , che di fatto è il valore delle scorte alla chiusura del primo periodo nella soluzione ottima precedentemente trovata.

## Tecniche di riduzione dei domini basate su un'estensione al caso dinamico dei metodi presentati in [TS05]

### *Metodo I per la riduzione dei domini*

La **Proposizione 3** e la **Proposizione 4** possono essere estese al caso dinamico, ovvero la riduzione dei domini può essere resa più efficace in presenza di una soluzione parziale, se alcune proprietà di questa vengono tenute in considerazione mentre viene eseguita la procedura di riduzione su un certo nodo dell'albero decisionale.

### *Estensione per la Proposizione 3 in presenza di una soluzione parziale*

Se la condizione (76) descritta nella **Proposizione 2** vale per l'intervallo  $[i..j-1]$  (oppure, in modo duale, se la (76a) vale per l'intervallo  $[i..j]$ ), la proposizione afferma che il periodo ottimo per il successivo ordine non cadrà dopo il periodo  $j$ ; inoltre il set di tutti i possibili valori ammissibili per i livelli di chiusura delle scorte per ogni periodo  $m$  dell'intervallo potranno essere ottenuti con la formula (77) fornita nella **Proposizione 3**. Quindi avremo un periodo ottimo, per fissare l'ordine successivo, che andrà a cadere nell'intervallo  $[i+1..j]$ . Se una soluzione parziale viene fornita, possiamo effettuare due controlli per restringere ulteriormente il set dei valori ammissibili per i livelli di chiusura delle scorte.

**Lemma 1:** Se  $\delta_i = 0$  nella soluzione parziale considerata,  $T(i, j)$  non è un ciclo di rifornimento  $\forall j \mid j \in [i+1..N]$ , dunque possiamo evitare di effettuare,  $\forall m \in T(i, j)$ , il calcolo (77) dei valori da aggiungere ai domini descritto nella

### **Proposizione 3**

**Prova:** tale calcolo aggiunge infatti ai domini dei livelli di chiusura per le scorte nei periodi  $[i..j]$  tutti i valori che sarebbero ammissibili nel caso in cui  $T(i, j)$  fosse un ciclo di rifornimento.  $\square$

**Lemma 2:** *Dal momento che abbiamo una soluzione parziale, è possibile definire l'insieme*

$$K = \{k \mid k > i \wedge k \leq j \wedge \delta_k = 1\}$$

*qualora tale insieme sia non vuoto, sia  $\bar{k}$  il più piccolo tra questi valori, allora possiamo essere certi che il periodo ottimo per il successivo ordine non potrà cadere dopo  $\bar{k} \leq j$ .*

**Prova:** infatti per assurdo se  $\exists h > \bar{k}$  tale che  $h$  è il periodo ottimo per l'ordine successivo, in ogni caso ritroviamo un altro ordine fissato per  $\bar{k} < h$ , che quindi segue l'ordine in  $i$  e precede quello che è supposto essere il successivo cioè  $h$ .  $\square$

Dal **Lemma 2** segue quindi che l'iterazione (77) descritta nella **Proposizione 3** dovrà essere effettuata solo  $\forall m \in T(i, \bar{k})$ , infatti rispetto alla soluzione parziale fornita in tal caso non potrà esistere un ciclo di rifornimento  $T(i, j)$  con  $j > \bar{k}$ .

*Estensione per la Proposizione 4 in presenza di una soluzione parziale*

Si è osservato come, se la condizione (78) data in questa proposizione risulta valida, sia necessario comunque in ogni caso fissare un ordine per il periodo  $k+1$ , calcolando i valori da aggiungere ai domini dei livelli di chiusura delle scorte come specificato dalle formule (79) e (80). Dal momento che ci troviamo in un contesto dinamico e conosciamo una soluzione parziale, due controlli sono possibili per ridurre ulteriormente i domini rispetto al caso statico.

**Lemma 3:** *Se la condizione (78) è rispettata e  $\delta_{k+1} = 0$ , è già stato stabilito che non si deve fissare un ordine per tale periodo, dunque ogni valore prodotto dalle iterazioni (79) e (80) descritte nella **Proposizione 4** risulterà non ammissibile rispetto alla soluzione parziale fornita.*

**Prova:** *la condizione (78) è rispettata, dunque i valori prodotti sarebbero ammissibili solo nel caso in cui  $\delta_{k+1} = 1$   $\square$*

**Lemma 4:** Se la condizione (78) è rispettata e  $\delta_{k+1}$  non è stato ancora assegnato oppure se è stato assegnato ad uno, allora dobbiamo effettuare due controlli: rispettivamente per le situazioni 1. e 2. considerate nella **Proposizione 4**.

1. è necessario in questo caso definire

$$h = \min\{h \mid h > k + 1 \wedge h < \min(l) \wedge \delta_h = 1\}$$

qualora esista un tale  $h$ , allora nell'iterazione (79) che calcola i valori ammissibili descritta nella **Proposizione 4 punto 1** sarà necessario sostituire  $\min(l)$  con  $h - 1$ , dunque la formula risultante sarà:

$$R_{m \mid m \in \{k+1, \dots, h-1\}}^S + = \cup\{\tau \mid \tau = R(k+1, h-1) - \sum_{t=k+1}^{m-1} \tilde{d}_t\} \quad (83)$$

**Prova:** analogo a quanto descritto nella prova del **Lemma 2**  $\square$

2. è necessario in questo caso definire

$$h = \min\{h \mid h > k + 1 \wedge h < \max(l) \wedge \delta_h = 1\}$$

qualora esista un tale  $h$ , allora nell'iterazione (80) che calcola i valori ammissibili descritta nella **Proposizione 4 punto 2** sarà necessario sostituire  $\max(l)$  con  $h - 1$ , dunque la formula risultante sarà:

$$R_{m \mid m \in \{k+1, \dots, h-1\}}^S + = \cup\{\tau \mid \tau = R(k+1, h-1) - \sum_{t=k+1}^{m-1} \tilde{d}_t\} \quad (84)$$

**Prova:** analogo a quanto descritto nella prova del **Lemma 2**  $\square$

### Metodo II per la riduzione dei domini

Nel metodo di riduzione dei domini II descritto in [TS05] vengono considerati due differenti casi:  $Q_{zero}(i, start\_inv)$  e  $Q_{pos}(i, floor\_val)$ .

Il primo caso  $Q_{zero}(i, start\_inv)$ , considera la possibilità che non venga fissato alcun ordine nei periodi  $i$  (con il livello delle scorte a  $start\_inv$ ), oppure che venga sì fissato un ordine, ma di dimensione attesa pari a 0. Dal momento che

entrambi gli assegnamenti  $\delta_i = 0 \vee \delta_i = 1$  sono leciti in questo caso, non è possibile ridurre i domini ulteriormente anche disponendo di una soluzione parziale.

Nel secondo caso  $Qpos(i, floor\_val)$  una riduzione è invece possibile: siamo infatti sicuri che un ordine verrà fissato in  $i$ , dunque  $\delta_i = 1$ ; se quindi sappiamo che l'assegnamento corrente è  $\delta_i = 0$  nella soluzione parziale fornita, allora possiamo evitare di calcolare i valori come descritto in  $Qpos(i, floor\_val)$  e di aggiungerli ai domini ammissibili, infatti i valori prodotti da tale iterazione sarebbero non ammissibili rispetto all'assegnamento corrente  $\delta_i = 0$ . Inoltre, se  $\delta_i = 1$ , nella procedura  $Qpos(i, floor\_val)$ , come è possibile notare osservando lo pseudo-codice in [TS05], si cerca il minimo  $j$  (indice di periodo) per il quale non è soddisfatta la condizione verificata all'interno dei cicli:

$$\begin{aligned}
 c(i, k-1) + c(k, j) &\leq c(i, j) \wedge \\
 b(i, k-1) &< \sum_{t=k}^j \tilde{d}_t + b(k, j) \wedge \\
 floor\_val &< \sum_{t=i}^{k-1} \tilde{d}_t + b(i, k-1)
 \end{aligned} \tag{85}$$

dalle informazioni ricavate dalla soluzione parziale posseduta possiamo ricavare il valore  $u = \min\{u \mid u > i \wedge u < j \wedge \delta_u = 1\}$ , se tale valore esiste, allora l'intervallo che dovremo considerare nel calcolo dei valori ammissibili per i domini sarà  $[i..u-1]$  e non  $[i..j-1]$  analogamente a quando mostrato nella dimostrazione del **Lemma 2**.

Anche in questo caso la **Proposizione 5** può essere nuovamente utilizzata dopo aver effettuato la riduzione con entrambi i metodi proposti, per ottenere un set di domini ulteriormente ridotti mediante l'intersezione dei due risultati ottenuti da tali metodi. Notevole è comunque, anche in questo caso, il riscontro sperimentale su un numero elevato di istanze, che sembra confermare come il solo primo metodo, esteso al caso dinamico, unitamente al solver con strategia MAC-DB, sia in grado di produrre gli stessi risultati che produrrebbe l'intersezione dei risultati di entrambe le tecniche estese al caso dinamico.



### Esempio numerico

In questo caso faremo riferimento all'istanza già considerata per la riduzione a priori dei domini, essendo questa un'estensione diretta di tale tecnica. Riportiamo nuovamente i parametri:

Previsioni per la domanda

Periodo	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{d}_i$	101	33	347	29	1163	30	12

il livello iniziale delle scorte è fissato a zero. Si assume che la domanda sia distribuita normalmente in ogni periodo con un coefficiente di variazione  $\sigma/\mu = 1/3$  costante. Gli altri parametri del problema sono  $a = 500$  per ordine,  $h = 1$  per unità per periodo, e  $\alpha = 0.95$  ( $z_{\alpha=0.95} = 1.645$ ). Nella seguente tabella sono illustrati i domini ridotti per i due metodi a priori DR1 e DR2, i domini ridotti che si ottengono dall'intersezione di tali risultati e infine il valore ottimo per le scorte in chiusura in ogni periodo, ottenuto risolvendo il problema.

$i$	$I_i^{S_I}$	$I_i^{S_{II}}$	$I_i^{S_I} \cap I_i^{S_{II}}$	$\tilde{I}_i^*$
1	{55,91}	{55,91}	{55,91}	91
2	{18,22,58}	{22,58,538,568}	{22,58}	58
3	{190,220}	{190,191,220,221,1858,1888,1900}	{190,220}	220
4	{16,161,191}	{161,162,191,192,1801,1829,1831,1843,1859,1871}	{161,191}	191
5	{638,668,680}	{638,666,668,680,696,708}	{638,668,680}	680
6	{16,30,608,638,650}	{608,636,638,650,666,678}	{608,638,650}	650
7	{7,18,596,626,638}	{596,624,626,638,654,666}	{596,626,638}	638

Consideriamo ora solamente l'estensione al primo metodo di riduzione a priori DR1.

Conoscendo i valori assegnati ai  $\delta_i$  nella soluzione ottima per il problema:  $\{1,0,1,0,1,0,0\}$  possiamo facilmente fissare una soluzione parziale, ad esempio  $\{1,\bullet,1,0,1,\bullet,\bullet\}$ , dove i  $\bullet$  indicano i  $\delta_i$  ancora da assegnare.

Applicando il primo metodo di riduzione dinamica all'istanza rispetto a tale soluzione parziale, i domini ridotti risulteranno essere:

$i$	$I_i^{S_I}$	$I_i^{S_I}$ dinamica $\rightarrow \{1,\bullet,1,0,1,\bullet,\bullet\}$	$I_i^{S_I} \cap I_i^{S_{II}}$	$\tilde{I}_i^*$
1	{55,91}	I1 2 {55, 91}	{55,91}	91
2	{18,22,58}	I2 2 {22, 58}	{22,58}	58
3	{190,220}	I3 1 {220}	{190,220}	220
4	{16,161,191}	I4 1 {191}	{161,191}	191
5	{638,668,680}	I5 3 {638, 668, 680}	{638,668,680}	680
6	{16,30,608,638,650}	I6 3 {608, 638, 650}	{608,638,650}	650
7	{7,18,596,626,638}	I7 3 {596, 626, 638}	{596,626,638}	638

Si noti che la riduzione (dove il mantenimento dell'arc-consistenza è implicito in quanto effettuato dal solver durante la propagazione) ha modificato il set dei domini rendendolo un sottoinsieme di  $I_i^{S_I} \cap I_i^{S_{II}}$ . Si è dunque mostrato sperimentalmente con tale esempio, non solo che la riduzione dinamica porta a domini maggiormente ridotti, ma anche che applicare entrambi i metodi estesi al caso dinamico facendone poi l'intersezione come spiegato nella **Proposizione 5** sia ridondante in presenza di un solver che mantenga l'arc-consistenza, infatti pur applicando anche il secondo metodo non si ottengono ulteriori riduzioni rispetto alla soluzione parziale fornita; un certo numero di altre evidenze sperimentali suggeriscono la validità di questa ipotesi.

## Struttura generale dei vincoli globali implementati

Per attuare una riduzione dinamica dei domini delle variabili come quella descritta è necessario utilizzare un solver che dia la possibilità di implementare dei vincoli globali. Ovviamente tale solver al suo interno dovrà disporre di un opportuno meccanismo di propagazione che possa attivare tali vincoli durante la ricerca. Un vincolo globale è di per sé uno strumento molto potente, esso offre infatti uno scheletro e delle funzionalità di base proprie di un sistema ad eventi. Se lasciato privo di una specifica implementazione il vincolo non farà nulla sebbene esso venga aggiunto al modello, ma se una qualche logica verrà implementata al suo interno questa sarà in grado di influenzare la ricerca modificando, durante la fase di propagazione, i domini delle variabili sulla base del codice che esso implementa. Capiamo quindi ora perché tale strumento si possa rivelare potente: è possibile infatti cablare del codice *special purpose* dedicato ad un particolare problema o ad una certa classe di problemi, all'interno di un solver *general purpose*.

Nel nostro caso i vincoli globali implementati possono essere efficacemente descritti dall'immagine nella figura 2.

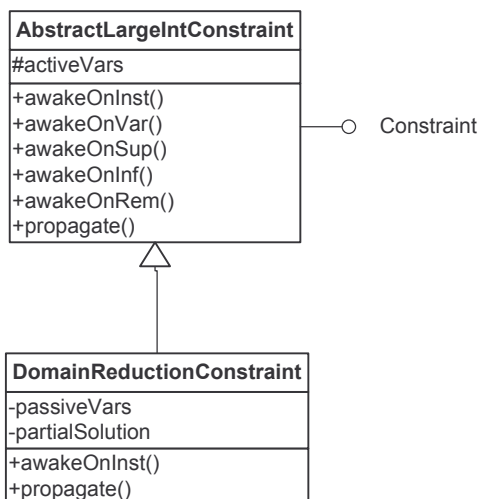


Figura 2.

Scheletro di un vincolo globale

Ciascuno dei tre vincoli globali implementati mantiene al suo interno due set di riferimenti, uno per le variabili attive e uno per quelle passive. Le variabili attive sono quelle il cui valore (se assegnate) o il cui stato flottante influenzano

direttamente le routine di risposta agli eventi del vincolo; in pratica sono una sorta di input per il vincolo. Il vincolo non modifica mai il valore di tali variabili, semplicemente lo legge e lo sfrutta nella computazione per rimuovere elementi dai domini delle variabili passive. Le variabili passive diventano quindi una sorta di output per il vincolo. Ogni volta che il vincolo modifica il dominio di una variabile passiva ovviamente vengono scatenati una serie di eventi collegati al mantenimento dell'arc-consistenza effettuato dal solver, dunque altri valori verranno rimossi dai domini delle variabili decisionali sino alla quiescenza; ma potrà certamente capitare che il mantenimento dell'arc-consistenza riduca ad un solo valore il dominio di una qualche variabile attiva, attivando nuovamente il vincolo, oppure renda vuoto tale dominio, imponendo al solver di attivare il backtracking. Come è possibile osservare nella classe UML che descrive la struttura generale dei vincoli vi sono due metodi particolarmente significativi:

- il metodo `awakeOnInst()`: che è invocato quando una variabile decisionale viene istanziata
- il metodo `propagate()`: che è invocato quando è necessario propagare il vincolo sull'istanza corrente

Il primo metodo è parte integrante del sistema di propagazione per il mantenimento dell'arc-consistenza basato su eventi e implementato in Choco. È possibile trovare una dettagliata descrizione del kernel di Choco e del suo meccanismo di propagazione in [OCRE]. Come è possibile leggere in tale documento Choco è stato progettato sin dal principio in modo da rendere particolarmente semplice la sua estensione in termini di strategie di ricerca e introduzione di nuovi vincoli; inoltre il sistema di propagazione basato su eventi è stato intensamente ottimizzato. La struttura del codice è estremamente modulare e rende possibile focalizzare l'attenzione solo sui particolari che si è interessati a modificare e/o sfruttare, senza doversi curare della complessità intrinseca che il codice di un solver necessariamente presenta. Nel nostro caso, oltre all'introduzione di nuovi vincoli, è stato necessario anche modificare la strategia di selezione delle variabili e dei valori per il branching nella ricerca. La creazione

di nuovi vincoli, come osservato, si è rivelata estremamente semplice, grazie alla possibilità di ereditare l'intero comportamento di un vincolo globale astratto dalla classe `AbstractConstraint` (di cui `AbstractLargeIntConstraint` non è altro che una specializzazione), per poi sfruttare il polimorfismo e modificare solo la logica di propagazione aggiungendo al metodo `propagate()` il codice relativo all'implementazione delle tecniche di riduzione dinamica dei domini presentate. Si è dunque sfruttato il metodo `awakeOnInst()` per risvegliare il vincolo quando una qualsiasi variabile decisionale viene istanziata. All'interno di tale metodo si controlla che la variabile sia nella lista di quelle attive: quelle che devono cioè causare un risveglio del vincolo, in quanto la logica implementata al suo interno ne è influenzata; se il controllo è positivo si invoca il metodo `propagate()` che riduce di conseguenza i domini delle variabili passive.

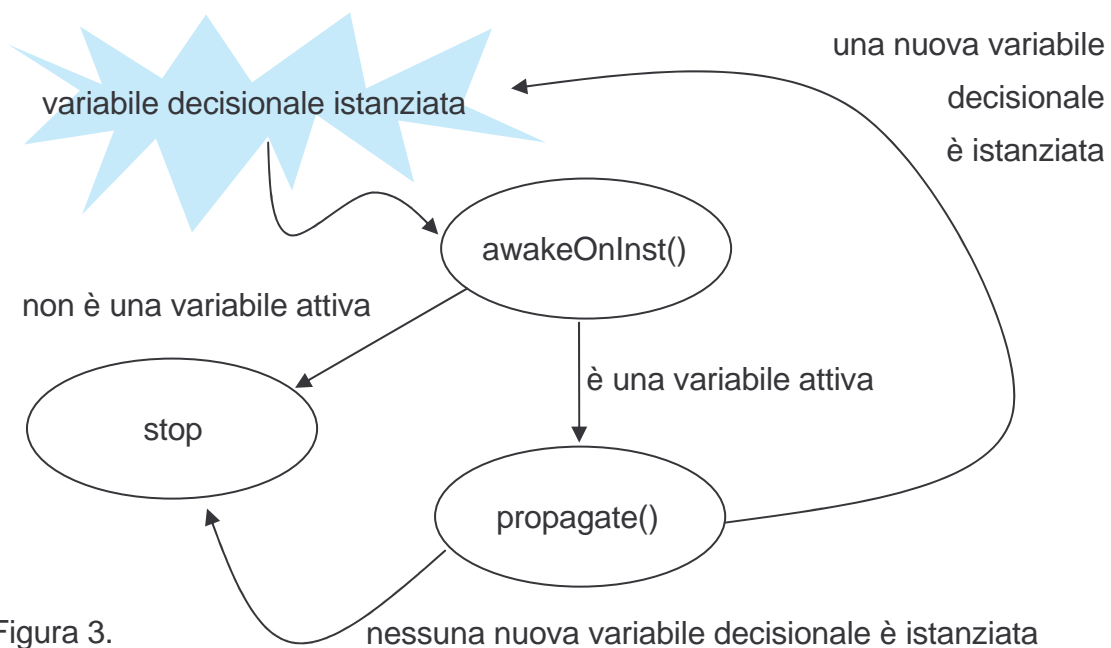


Figura 3. Logica di propagazione

Tutta l'infrastruttura di supporto per il mantenimento dell'arc-consistenza e la gestione del backtracking è incapsulata e viene gestita in modo trasparente dal kernel, lasciando allo sviluppatore la libertà di non doversi preoccupare di tracciare lo stato corrente della ricerca nello sviluppo dei nuovi vincoli globali. Per quel che riguarda invece la gestione delle strategie di ricerca, anche in questo

caso l'incapsulamento e l'ereditarietà permettono una gestione trasparente delle differenti logiche e anche la possibilità di modificarle facilmente sfruttando differenti implementazioni di un'interfaccia che rappresenta la logica astratta di selezione della variabile nel branching, nonché di una seconda interfaccia per la selezione dei valori nei domini delle variabili.

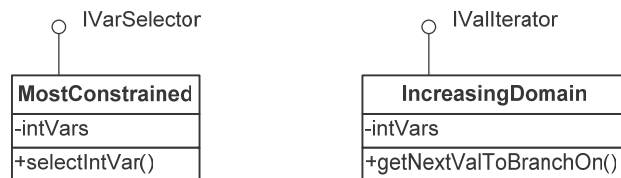


Figura 4.

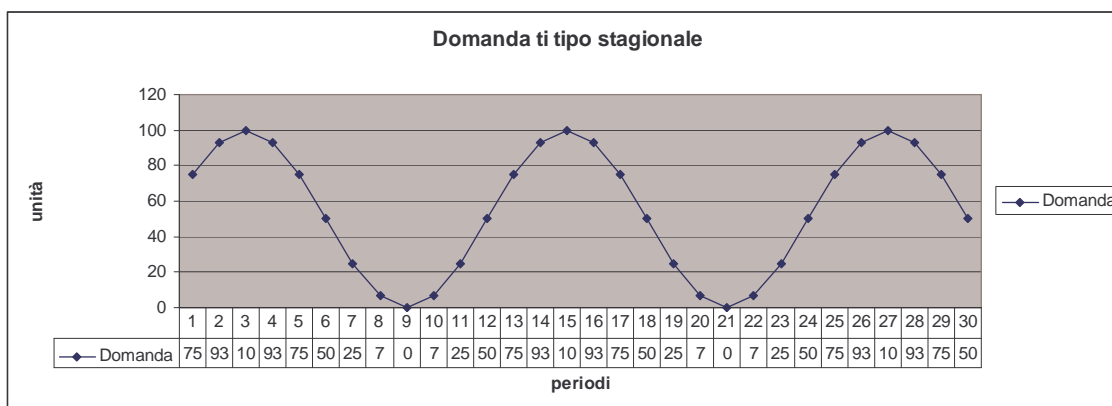
#### Logiche di branching

Al contrario di quanto suggerito in [TS05] si è adottata una logica di selezione delle variabili che impone non di effettuare preferibilmente il branching sulle variabili binarie  $\delta_i$ , per poi considerare le altre; ma di applicare il *most constrained* principle, scegliendo poi, qualora due variabili risultino equamente vincolate, quella con il dominio più piccolo; tale scelta si è dimostrata sperimentalmente più efficace di quella adottata in [TS05].

## Analisi dei risultati sperimentali

Per verificare la correttezza e l'efficacia delle tecniche di riduzione implementate sono stati condotti dei test su un vasto numero di istanze. Test su istanze con valori casuali per la domanda nei vari periodi sono stati generati ed analizzati per osservare il comportamento dei metodi di riduzione in presenza di dati scarsamente correlati, mentre istanze ad-hoc sono state generate e risolte per osservare l'efficacia delle tecniche a fronte di una domanda in linea con gli effettivi andamenti stagionali che tipicamente si osservano nei casi pratici. Differenti euristiche per la selezione delle variabili nel branching sono state confrontate per verificare quale potesse essere la strategia migliore da adottare.

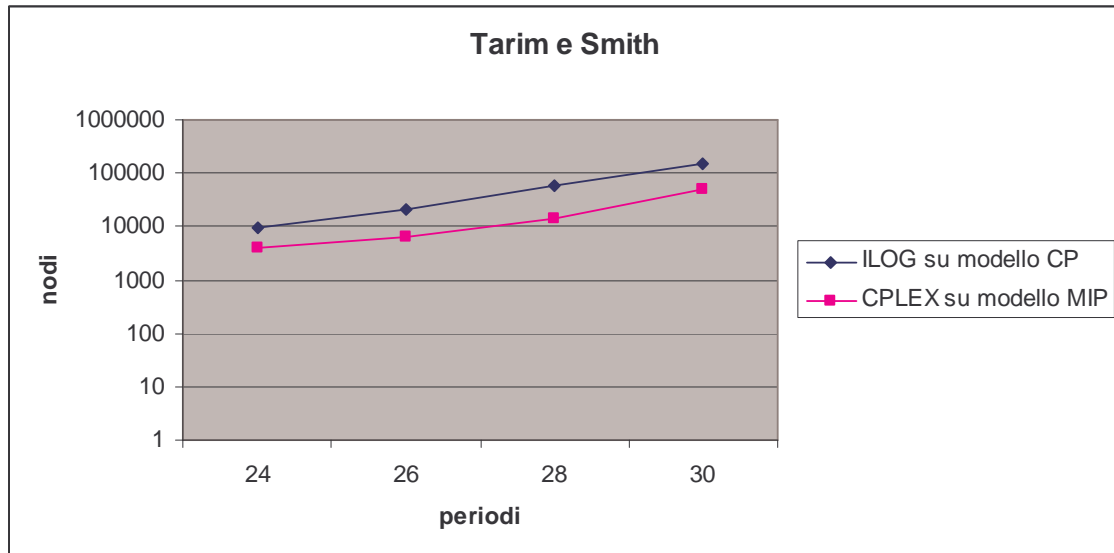
Lo stato dell'arte per il problema presentato, in assenza delle nuove tecniche qui introdotte che lo migliorano sensibilmente, può essere osservato considerando i risultati sperimentali presentati in [TS05]. In tale articolo le tecniche di filtraggio per i domini delle variabili decisionali sono applicate prima di effettuare la ricerca, effettuata sfruttando il solver ILOG OPL studio. Come già spiegato in precedenza, l'utilizzo di un solver CP ha permesso agli autori di diminuire sensibilmente i tempi di ricerca rispetto alle performance di CPLEX applicato al modello MIP, pur aumentando il numero di nodi esplorati nella ricerca: infatti il solver CP non deve, al contrario di quello MIP, risolvere ad ogni nodo un rilassamento continuo del problema originale. Nella figura seguente viene riportato un esempio di domanda stagionale:



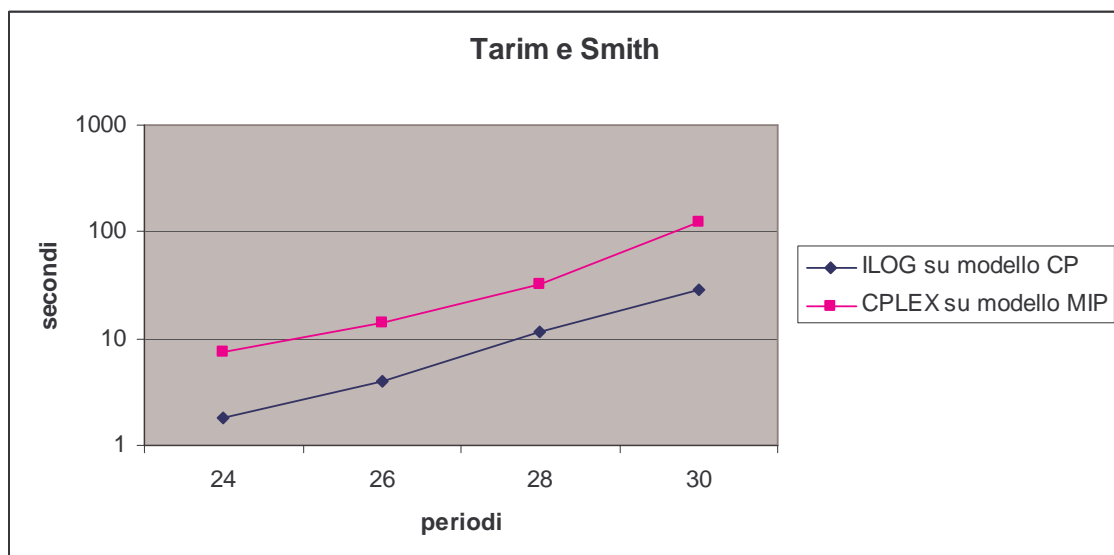
Assumendo il livello iniziale delle scorte fissato a zero, si considera una domanda distribuita normalmente in ogni periodo con un coefficiente di variazione

$\sigma/\mu = 1/3$  costante. Gli altri parametri del problema sono  $a = 400$  per ordine,  $h = 1$  per unità per periodo, e  $\alpha = 0.95$  ( $z_{\alpha=0.95} = 1.645$ ).

I test effettuati da Tarim e Smith su tale istanza sono illustrati nell'immagine seguente:



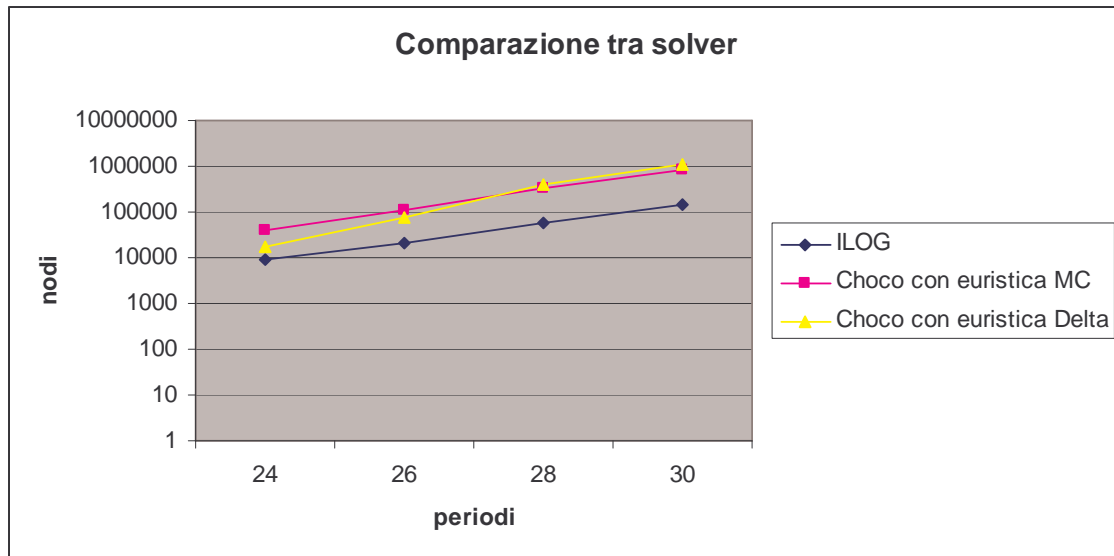
Nonostante siano applicate entrambe le tecniche di riduzione presentate in [TS05] il numero di nodi esplorati dal solver ILOG è sensibilmente maggiore, anche se nel complesso i tempi di esecuzione risultano minori:





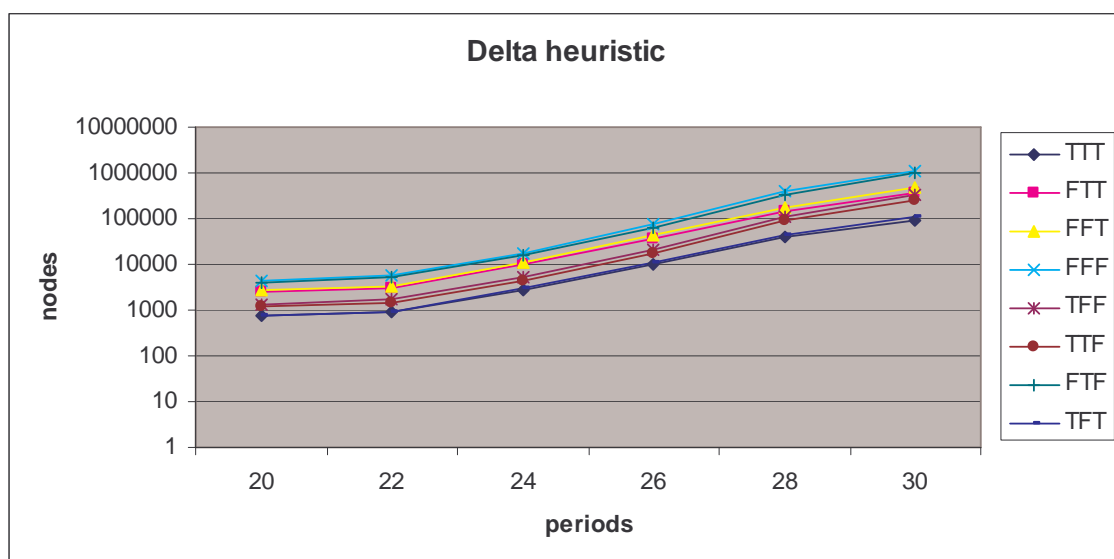
Ulteriori dati in linea con tali osservazioni sono presentati nell'articolo per differenti sequenze di valori della domanda nei vari periodi e per diversi costi fissi di ordinazione.

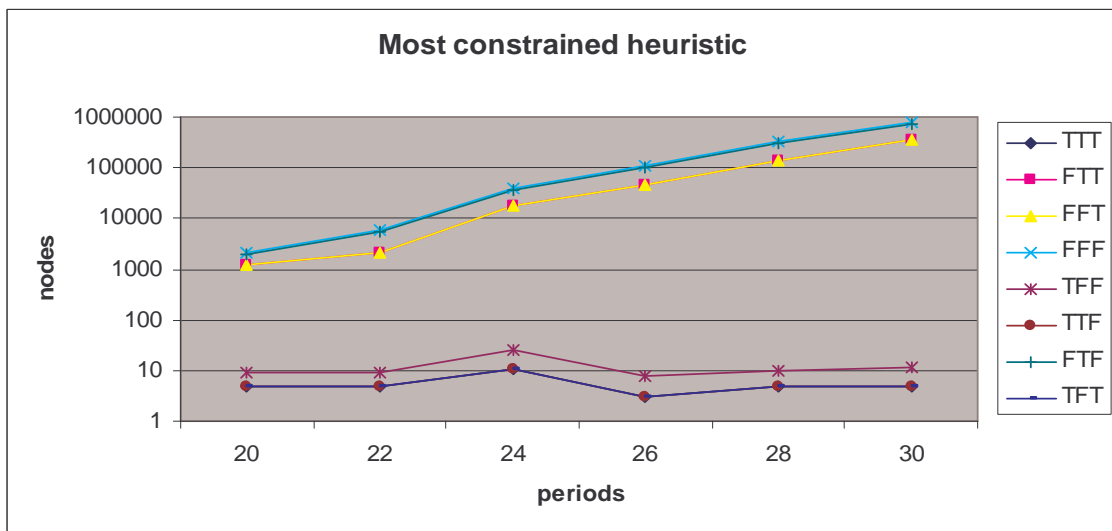
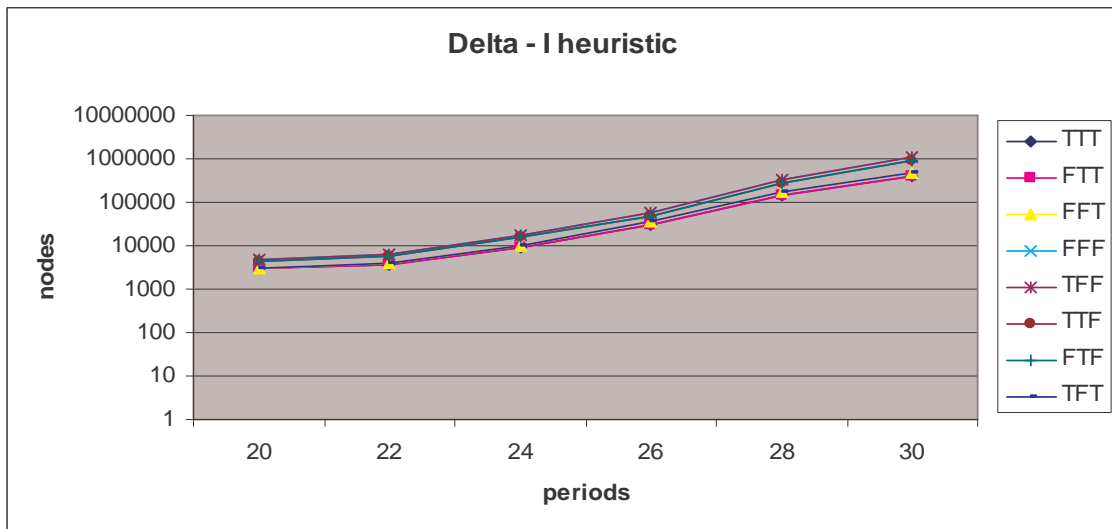
L'efficacia di ILOG è notevole, risolvendo infatti la stessa istanza utilizzando Choco ed i metodi di filtraggio per i domini delle variabili decisionali descritti in [TS05] si ottengono risultati sensibilmente peggiori in termini di nodi esplorati:



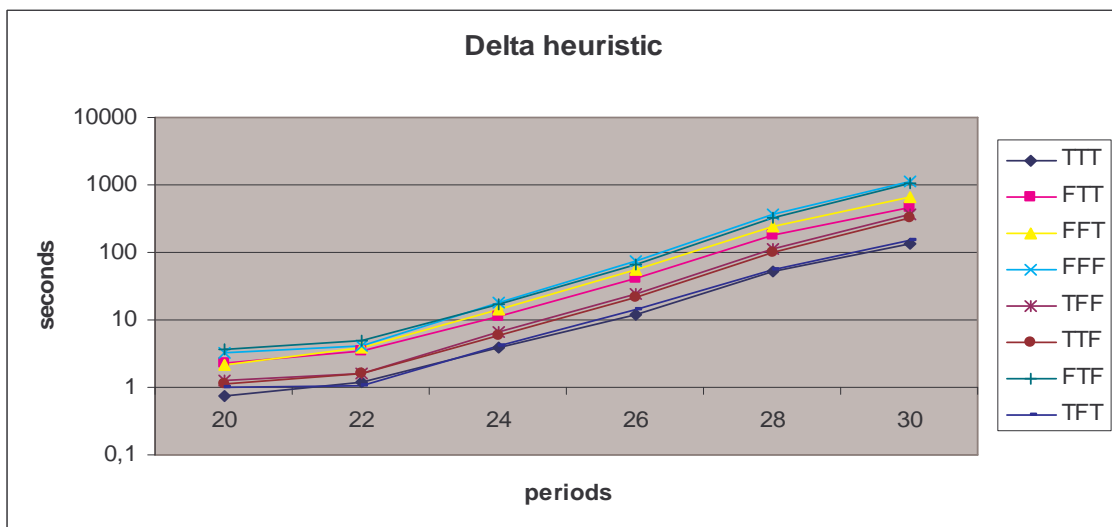
Da notare come l'euristica che privilegia il branching sulle variabili decisionali  $\delta_i$  si riveli in entrambi i casi efficace come osservato in [TS05], sebbene infatti l'euristica *Most Constrained* sia migliore su istanze di dimensioni maggiori i risultati restano comunque confrontabili. Da queste osservazioni capiamo come non sia in linea di principio molto significativo confrontare i risultati che verranno proposti con quelli presentati in [TS05], sebbene l'entità del miglioramento sia tale da non lasciare dubbi sull'efficacia delle tecniche. Non è sensato neppure confrontare i risultati in termini di tempi di risoluzione per due motivi: la differenza nell'hardware usato per i test e soprattutto la presenza di una macchina virtuale (Java) nel caso di Choco che rende i confronti sui tempi di esecuzione poco rilevanti. Nel seguito quindi considereremo *stato dell'arte* il trend rappresentato dalla linea gialla (Choco con euristica *Delta*) e i relativi tempi di esecuzione ottenuti con tale solver su una macchina con le seguenti caratteristiche: dual processor Intel(R) Xeon(TM) CPU 2.80GHz, 4GB RAM.

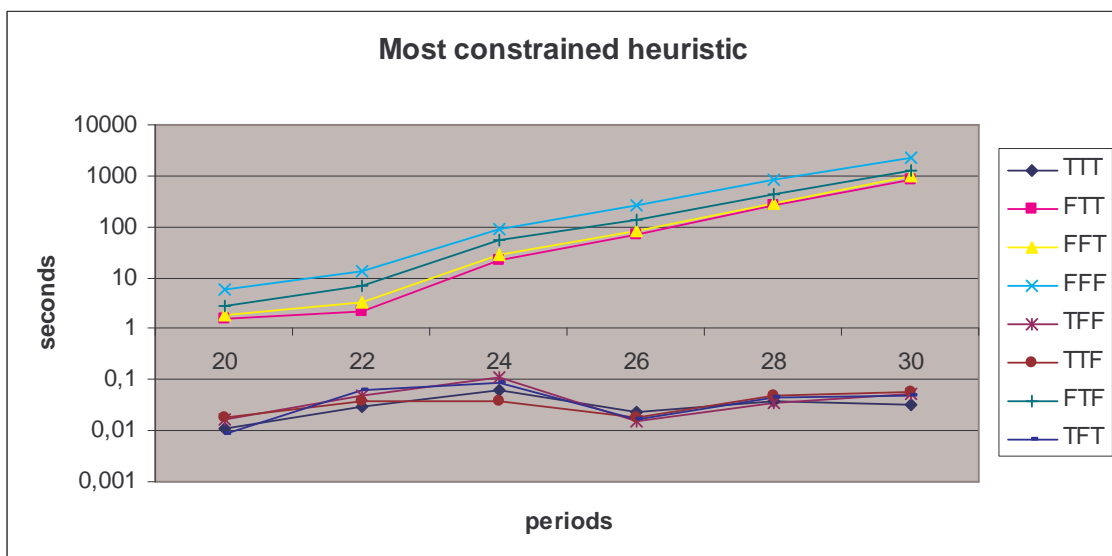
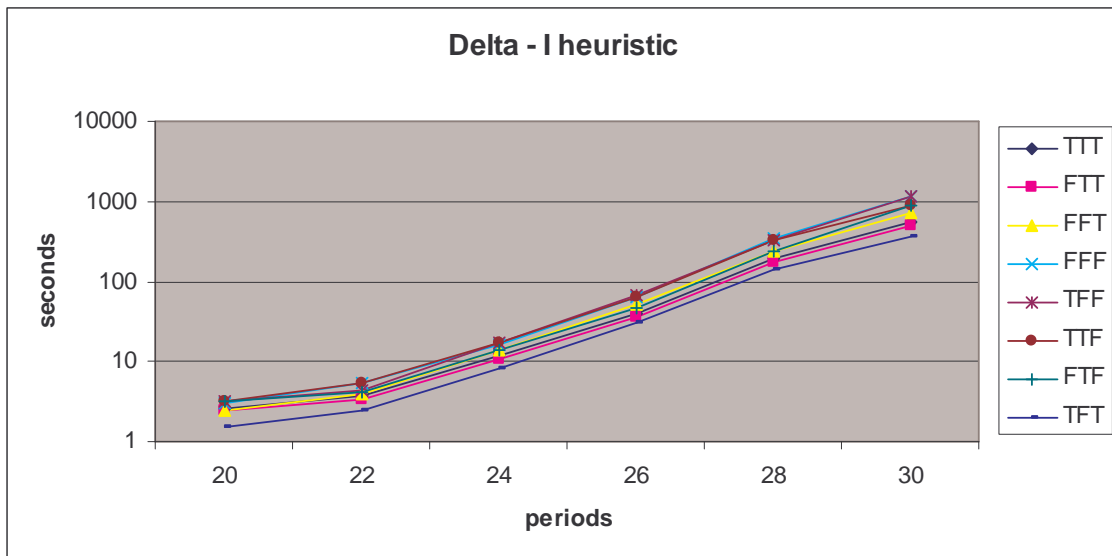
Come spiegato i test si sono concentrati su due tipi diversi di set di domande: non correlati e correlati. Nel caso di domande correlate si è considerato il set già illustrato con i relativi valori per i parametri del modello. Sono stati effettuati test utilizzando le tre tecniche di riduzione dinamica dello spazio di ricerca sia in modo combinato sia separatamente, per verificarne l'efficacia relativa; sono state inoltre considerate differenti euristiche. Presentiamo di seguito le tre euristiche considerate nei test: euristica che privilegia il branching sulle variabili decisionali  $\delta_i$ , euristica che privilegia il branching sulle variabili  $\delta_i$  e  $I_i$  (sensata in quanto i possibili valori che le  $I_i$  possono assumere sono notevolmente ridotti dal filtraggio effettuato nel nodo radice), ed euristica che segue il *most constrained principle*. Nel seguito riportiamo i grafici per tali euristiche rispetto a tutte le possibili combinazioni ottenibili con i tre vincoli globali presentati: ad esempio nella legenda TFT significa che il vincolo globale che sfrutta il rilassamento mediante programmazione dinamica è stato inserito nel modello (True), il vincolo che riduce lo spazio di ricerca mediante l'unione di periodi di non rifornimento non è stato aggiunto al modello (False), mentre il terzo vincolo presentato, che realizza una riduzione estendendo i metodi in [TS05] al caso dinamico, è stato infine anch'esso aggiunto al modello (True); la stessa logica può essere usata per interpretare le triple nelle legende dei grafici. I seguenti grafici mostrano i nodi esplorati nella ricerca della soluzione ottima nel caso della domanda stagionale già presentata e dei relativi parametri per il modello ach'essi già illustrati:





I successivi grafici riportano i tempi di esecuzione relativi alle stesse ricerche:

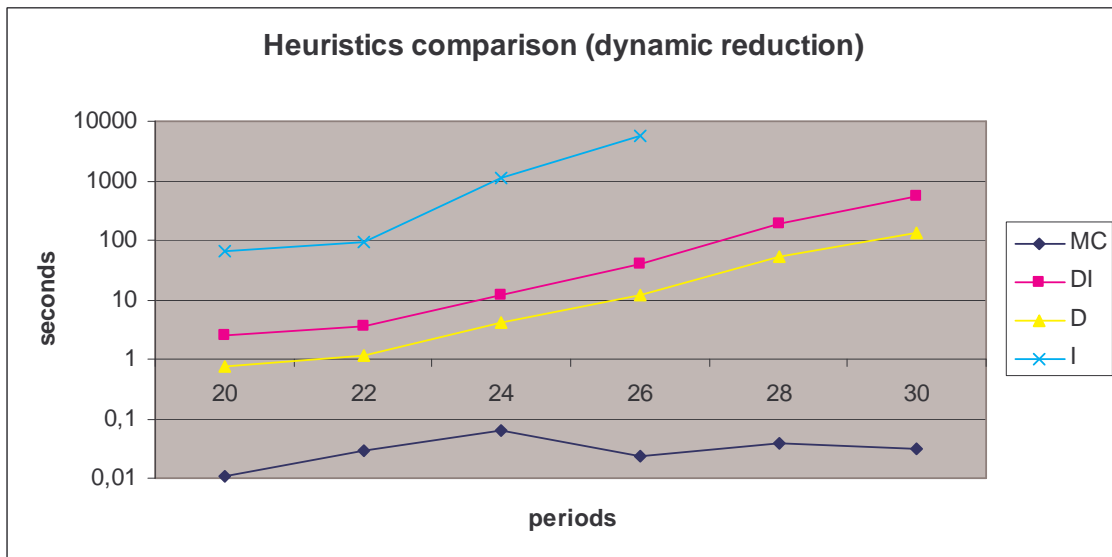
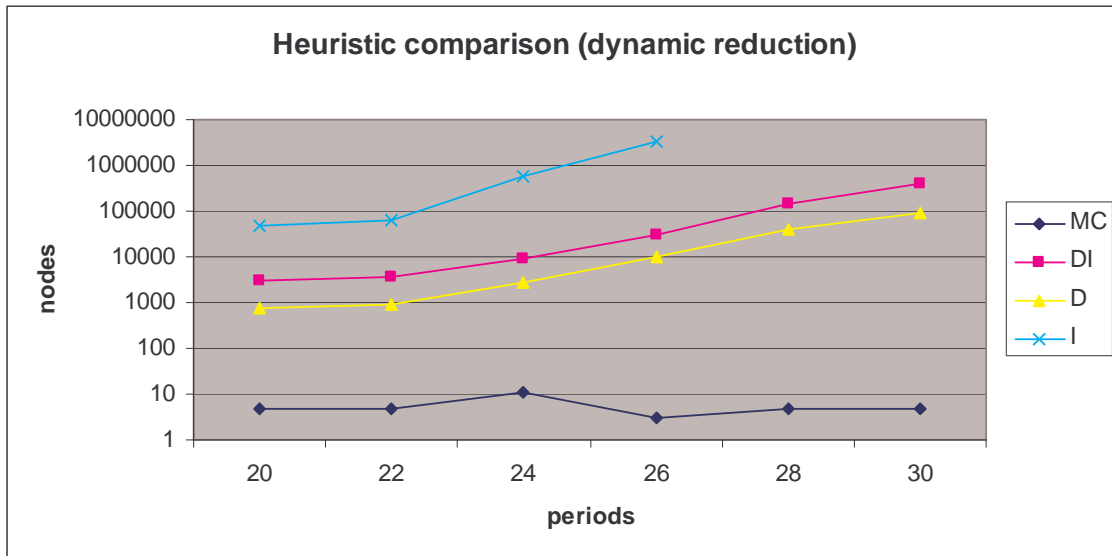




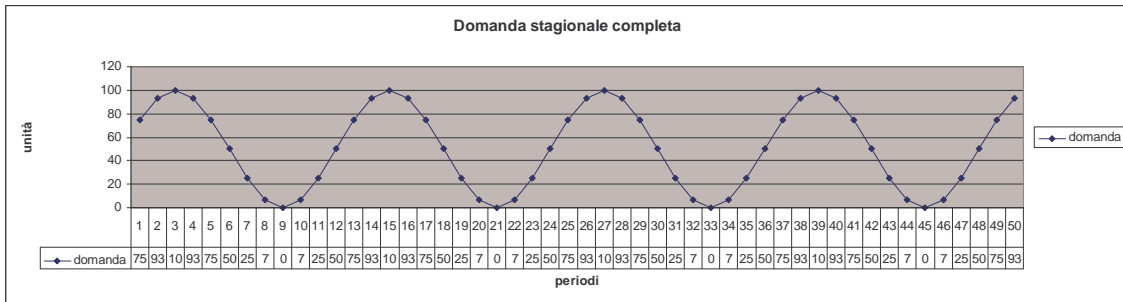
Sia nel caso in cui si considerino i nodi esplorati, sia in quello in cui i tempi di esecuzione siano confrontati, è possibile osservare come i metodi di riduzione risultino comunque efficaci, ma anche che tale efficacia risulta particolarmente evidente nel caso dell'euristica *most constrained*, dove la complessità del problema viene di fatto abbattuta di numerosi ordini di grandezza.

Possiamo ora confrontare tra loro i risultati ottenuti con le varie euristiche quando tutti i vincoli globali sono aggiunti al modello, nei grafici seguenti oltre alle tre euristiche già descritte ne viene introdotta anche una quarta, che tuttavia si è rivelata poco efficace e che prevede di effettuare prima il branching sulle variabili decisionali  $I_i$ . È possibile notare in questi grafici come una corretta scelta

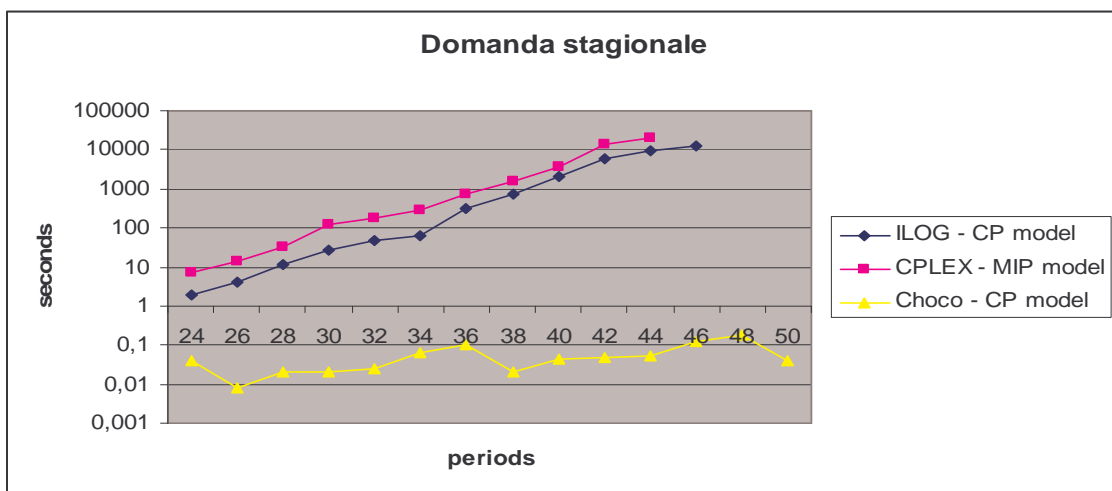
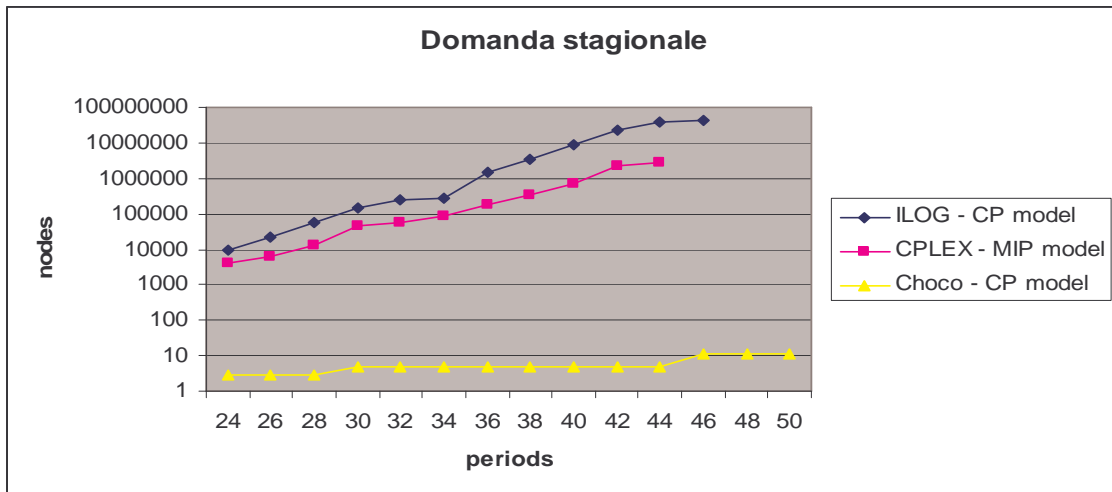
dell'euristica sia il punto chiave per garantire l'efficacia delle tecniche di riduzione proposte.



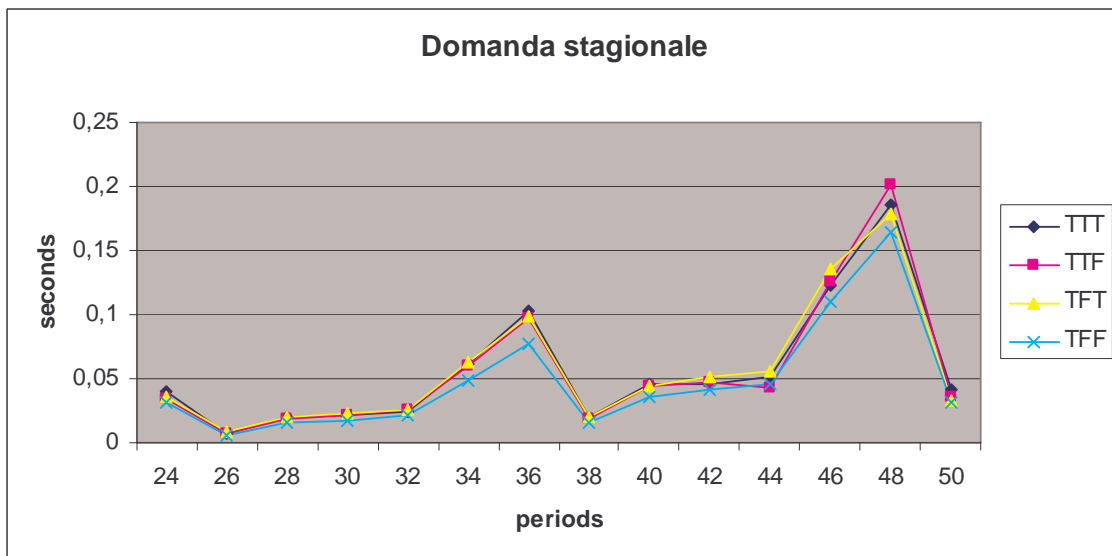
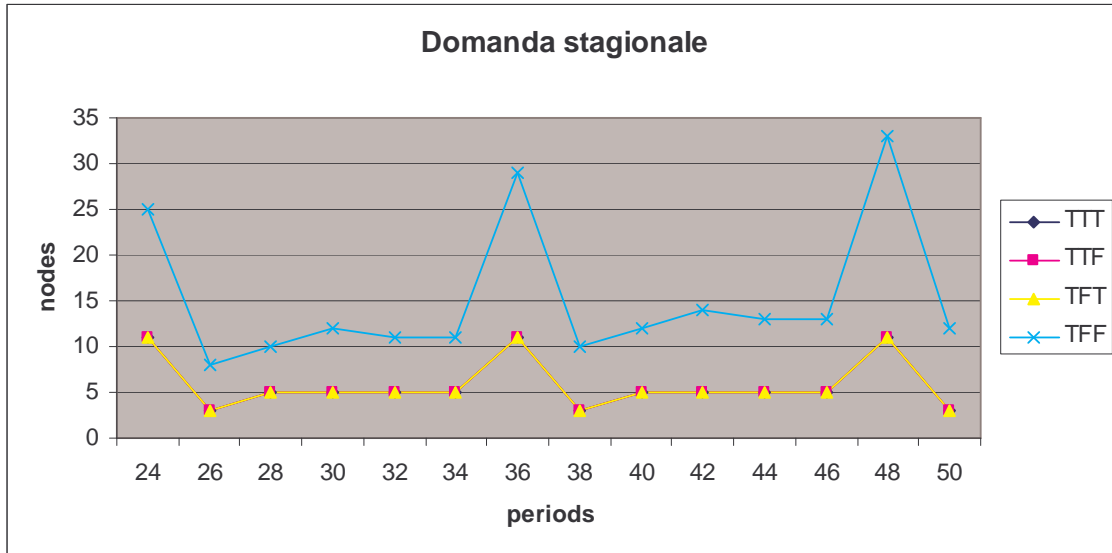
L'abbattimento della complessità del problema mediante i vincoli globali e le euristiche adottate risulta evidente, ma possiamo introdurre ulteriori elementi che mostrano come lo stato dell'arte sia stato di fatto superato. Se consideriamo il set originale di domande presentato in [TS05] (riportato in parte sopra nella figura della domanda stagionale) abbiamo un'istanza composta da più di 50 periodi.



I solver MIP e CP usati nei test in tale articolo non hanno dato alcuna soluzione per istanze di dimensione superiore a 46 periodi a causa dei timeout imposti sul numero di nodi e sui tempi di esecuzione. L'uso delle nuove tecniche di riduzione dinamica qui introdotte ha permesso di risolvere in tempi brevissimi (circa 0,1 secondi) istanze fino a 50 periodi.



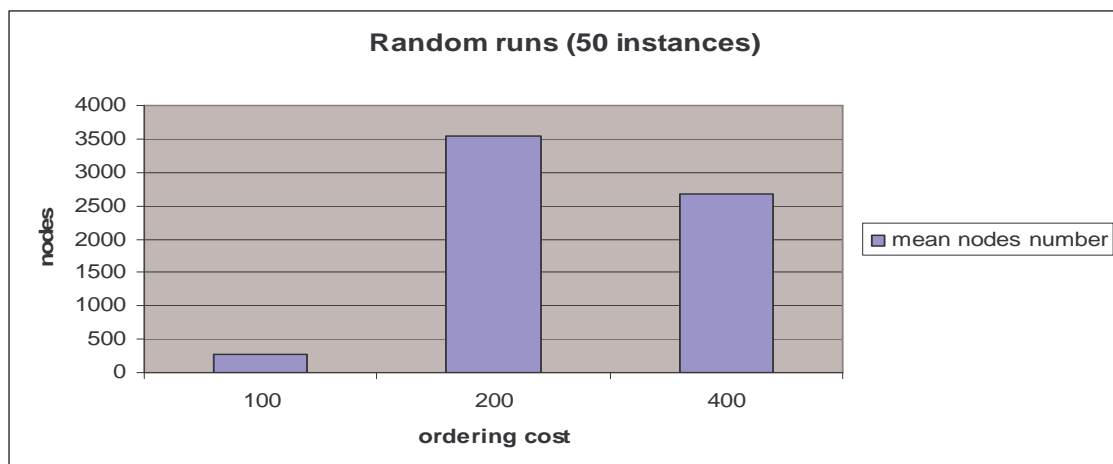
Può essere significativo ora osservare da vicino l'efficacia relativa delle tecniche di riduzione proposte, presentando i nodi esplorati e i vari tempi di esecuzione per diverse combinazioni di vincoli globali inseriti nel modello.



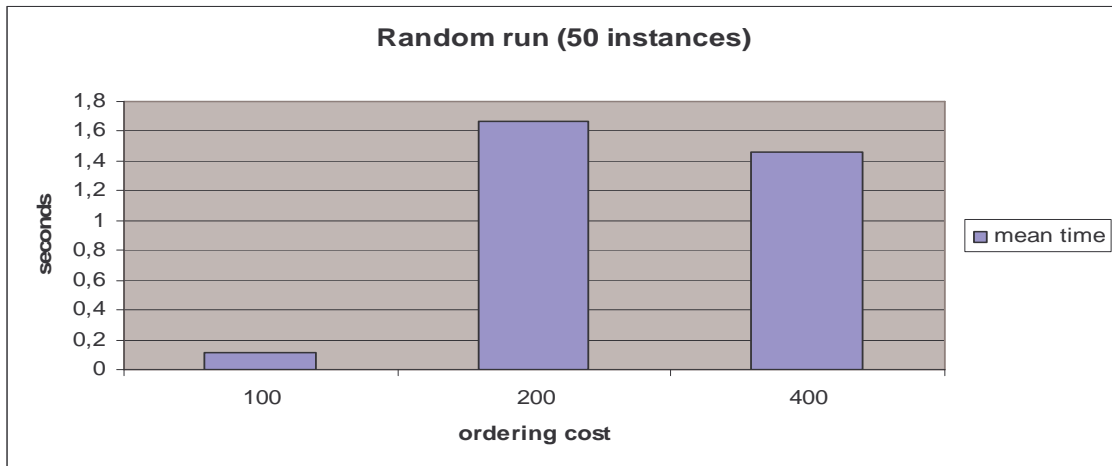
Vediamo come non sia possibile in modo univoco stabilire quale sia la combinazione migliore da adottare. In termini di nodi sembra sia possibile utilizzare solamente una delle ultime due tecniche, in aggiunta al rilassamento che sfrutta la programmazione dinamica, per ottenere gli stessi risultati che si avrebbero con entrambi i vincoli aggiunti al modello. Mentre usando solo il rilassamento mediante programmazione dinamica il numero di nodi esplorati cresce leggermente, mentre il tempo di esplorazione diminuisce (linea TFF) e

offre le prestazioni migliori in termini di tempi di risposta. Non è ben chiaro tuttavia se tale configurazione (TFF) garantisca sempre le prestazioni migliori, dal grafico emergono infatti alcuni punti in cui i tempi di altre configurazioni (vedi TTF o TFT) eguagliano o migliorano quelli di TFF, ad ogni modo data l'estrema efficacia dei metodi e i bassi tempi di risposta, non è possibile escludere a priori che le differenze non siano dovute ad altri processi in esecuzione sul server.

Infine introduciamo alcune considerazioni relative ai test effettuati su istanze con domande generate in modo casuale, dunque a dati che non rispecchiano i trend stagionali tipici delle istanze reali. Questi test sono stati utili per verificare la dipendenza delle tecniche implementate dai parametri del modello. In molti problemi di ottimizzazione combinatoria infatti, come ad esempio il Knapsack, la presenza di correlazione tra i dati in ingresso provoca una diminuzione dell'efficacia delle strategie *branch-and-bound*. Anche in questo caso si può osservare tale effetto. Rispetto ai dati presentati in precedenza per il set di domande stagionali consideriamo ora gli stessi parametri per il modello, ma un differente set di domande generato in modo casuale, ogni domanda è uniformemente distribuita tra [0,200], il costo di ordinazione è stato fatto variare su tre possibili valori: 100, 200, 400. Dall'esecuzione di 50 istanze, ciascuna composta da 30 periodi, per ogni possibile costo fisso di ordinazione è emerso come una correlazione tra tale costo fisso e il valor medio della domanda in ogni periodo causi un aumento della complessità del problema, che viene risolto con più difficoltà dalle tecniche qui presentate.







L'aumento di complessità non è comunque tale da creare difficoltà nella risoluzione, come è possibile osservare nei grafici è infatti all'incirca pari ad un ordine di grandezza.

## **Conclusioni**

Nei primi capitoli è stata presentata un'ampia rassegna sul problema del dimensionamento dei lotti di produzione, sono state illustrate le varie formulazioni proposte dagli anni cinquanta ad oggi per tale problema nella sua forma deterministica e in quella stocastica. L'attenzione è stata focalizzata, nella seconda parte del lavoro, soprattutto su quest'ultima formulazione ed in particolare sulla strategia *static-dynamic uncertainty*, presentata in [BT88] per la definizione di una politica ottima. Partendo dal lavoro di Tarim e Smith [TS05], dove viene presentata una formulazione CP del problema dei lotti di produzione, sono state sviluppate tre tecniche di riduzione dinamica dei domini delle variabili decisionali. Tali tecniche agiscono in modo attivo durante la ricerca nell'albero decisionale, tenendo conto della soluzione parziale rappresentata dal nodo corrente ed eliminando dai domini delle variabili non ancora assegnate i valori non ammissibili rispetto agli assegnamenti già effettuati. Basando la loro implementazione sulle tecniche presentate sono stati creati dei vincoli globali che effettuano tale riduzione dinamica dei domini. I test effettuati, comparati ai risultati sperimentali in [TS05], hanno mostrato come le tecniche presentate rappresentino ora lo stato dell'arte per la risoluzione di tale formulazione del problema. Ulteriori analisi sono state condotte per verificare l'effettiva validità dei metodi proposti a fronte di variazioni dei parametri nel modello, e anche in questo caso le tecniche si sono rivelate efficaci e robuste rispetto a tali variazioni come mostrato nei test riportati. Il modello presentato in [TS05] tuttavia, sebbene elegante da un punto di vista accademico, presenta ancora molti limiti rispetto agli scenari reali di applicazione: ad esempio esso non impone limiti alle capacità di produzione/ordinazione in un certo periodo; questo è ovviamente inverosimile in una qualsiasi realtà che voglia avvalersi della pianificazione descritta dalla soluzione ottima. Successivi sviluppi potrebbero quindi prevedere l'introduzione di modifiche al modello, in modo da migliorarne la qualità e le capacità espressive, nonché un'estensione per le tecniche di riduzione presentate qualora ci si trovi in presenza di vincoli aggiuntivi, ad esempio sulle capacità di produzione.

## ***Bibliografia***

- [TS05] S. Armagan Tarim, Barbara M. Smith. Constraint programming for Computing Dynamic (R,S) Inventory Policy with Non-Stationary Stochastic Demand under Service Level Constraints
- [TK03] S. Armagan Tarim, Brian G. Kingsman, The stochastic dynamic production/inventory lot-sizing problem with service-level constraints, *International journal of Production Economics*, 88:105-119, 2004
- [BT88] J. H. Bookbinder and J. Y. Tan. Strategies for the probabilistic lot-sizing problem with service-level constraints. *Management Science*, 34:1096-1108, 1988.
- [A81] Askin, R.G., "A procedure for production Lot Sizing with Probabilistic Dynamic Demand" *AIIE Trans.*, 13, 2(1981), 132-137.
- [S78] Baker, K., Dixon, P., Magazine, M., and Silver, E., 1978, An Algorithm for the Dynamic Lot Size Problem with Time-Varying Production Capacity Constraint. *Management Science*, 24 (16), 1710-1720.
- [S78-1] Silver E. A., Inventory control under a probabilistic time-varying demand pattern, *AIIE Trans.*, 10, 4 (1978), 371-379.
- [WW58] H. M. Wagner and T. M. Whitin. Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, 5:89-96, 1958.
- [B57] Bellman, R. E. (1957). *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [HZ94] Ronald B. Heady, Zhiwei Zhu. An Improved implementation of the Wagner-Whitin Algorithm. *Production and Operations Management*, vol 3. n° 1, winter 1994.
- [KSS00] D. Simchi-Levi, E. Simchi-Levi, P. Kaminsky. *Designing and managing the supply chain*, McGraw-Hill, 2000
- [F80] Fortuin, L., Five popular probability density Functions: A Comparison in the field of stock-control models, *J. Oper. Res. Soc.*, 31, 10 (1980), 937-942

- [GW74] Garska, S. J. e R. J. B. Wets, On decision rules in stochastic programming, *Math. Programming*, 7 (1974), 117-143.
- [GS77] Gupta, S. K. e J. K. Sengupta, Decision rules in production planning under chance-constrained sales, *Decision Sci.*, 8 (1977), 521-533
- [JM74] Johnson, L. A. e D. C. Montgomery, *Operation research in production planning, Scheduling, and inventory control*, Wiley, New York, 1974.
- [PBK77] Peters R. J., Boskma e H. A. E. Kupper, Stochastic programming in production planning: A case with non-simple recourse, *Statist. Neerlandica*, 31, 3 (1977), 113-126.
- [T83] Tan J. Y., Heuristic for the deterministic and probabilistic lot-sizing problems, M.A.Sc. Thesis, Department of Management Sciences, University of Waterloo, 1983.
- [V72] Vajda S. *Probabilistic programming*, Academic press, New York, 1972.
- [Z78] Zangwill, W. I., Minimum concave cost flows in certain networks, *Management science*, 14, 7 (1968), 429-450.
- [B77] Baker K. R. An experimental study on the effectiveness of rolling shedlues in production planning, *Decision Sci.*, 8, 1 (1977), 19-27
- [A03] K. Apt. *Principles of Constraint Programming*. Cambridge university Press, Cambridge, UK 2003
- [BPS99] S. C. Brailsford, C. N. Potts, B. M. Smith. Constraint satisfaction problems: Algorithms and applications. *European journal of operational research*, 119:557-581, 1999
- [LP01] I. J. Lustig and J-F Puget. Program does not equal program: Constraint programming and its relationship to mathematical programming. *Interfaces*, 31:29-53, 2001
- [OCRE] François Laburhe and the OCRE project team, *Choco: implementing a CP kernel*, Bouygues e-Lab, France
- [H05] J. N. Hooker, A Search-Infer-and-Relax Framework for integrating solution methods, CPAIOR 2005.

[JDB00] N. Jussien, R. Debruyne, P. Boizumault, Maintaining Arc-Consistency within Dynamic Backtracking, CP '02: Proceedings of the 6th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming, 2000

## Sommario

Introduzione .....	- 1 -
La teoria delle scorte.....	- 4 -
Il modello deterministico del lotto economico (EOQ) in presenza di una domanda statica.....	- 6 -
Soluzione per il modello deterministico del lotto economico in presenza di una domanda statica: .....	- 7 -
Il modello stocastico del lotto economico in presenza di una domanda statica .....	- 8 -
Il problema del lotto economico in presenza di una domanda dinamica e deterministica .....	- 11 -
Esempio numerico.....	- 14 -
Il problema del lotto economico in presenza di una domanda aleatoria e dinamica .....	- 18 -
La strategia static uncertainty .....	- 21 -
Stima di $G_{D(t)}^{-1}(\alpha)$ .....	- 24 -
La strategia dynamic uncertainty.....	- 25 -
La strategia static-dynamic uncertainty .....	- 26 -
Ambiente a orizzonte mobile (rolling schedule environment).....	- 30 -
Limiti dell'approccio a due stadi di Bookbinder e Tan per la strategia static- dynamic uncertainty.....	- 32 -
Un modello di programmazione lineare intera mista per determinare la politica ottima utilizzando la strategia static-dynamic uncertainty .....	- 33 -
Un modello CP per determinare la politica ottima utilizzando la strategia static- dynamic uncertainty.....	- 41 -
Tecniche di riduzione a priori dello spazio di ricerca per il modello CP-	44 -

Primo metodo di riduzione dei domini.....	- 46 -
<i>Secondo metodo di riduzione dei domini</i> .....	- 50 -
Esempio Numerico.....	- 51 -
Riduzione dinamica dello spazio di ricerca per il modello CP.....	- 53 -
Rilassamento del modello risolto mediante dynamic programming e sfruttato per attuare una strategia branch and relax.....	- 55 -
Tecnica di riduzione dinamica dei domini basata sull'unione di periodi adiacenti in cui non siano stati fissati degli ordini .....	- 60 -
Tecnica di riduzione dinamica dei domini basata sull'unione di periodi adiacenti in cui non siano stati fissati degli ordini .....	- 61 -
Esempio numerico.....	- 63 -
Tecniche di riduzione dei domini basate su un'estensione al caso dinamico dei metodi presentati in [TS05] .....	- 67 -
Metodo I per la riduzione dei domini.....	- 67 -
Estensione per la Proposizione 3 in presenza di una soluzione parziale-	67 -
Estensione per la Proposizione 4 in presenza di una soluzione parziale-	68 -
Metodo II per la riduzione dei domini.....	- 69 -
Esempio numerico.....	- 71 -
Struttura generale dei vincoli globali implementati .....	- 73 -
Analisi dei risultati sperimentali.....	- 77 -
Conclusioni .....	- 88 -
Bibliografia .....	- 89 -
Sommario.....	- 92 -