FACOLTA' DI INGEGNERIA
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica
Applicazioni di Intelligenza Artificiale L-S

INCERTEZZA DELLA DOMANDA NELLE CATENE DI SUPPORTO:

TECNICHE DI RIDUZIONE

DINAMICA DELLO SPAZIO DI RICERCA PER UN MODELLO CP

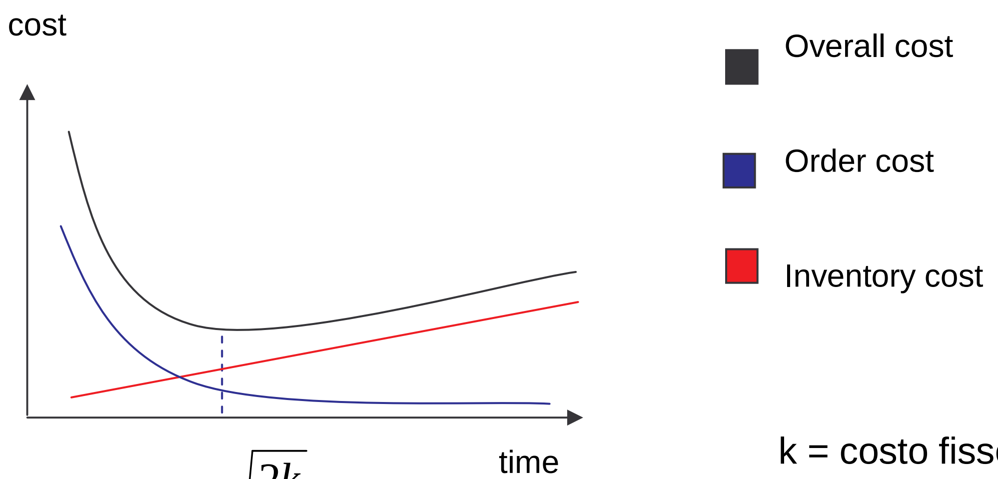
Tesi di laurea di:
Roberto Rossi

Relatore:
Prof. Michela Milano

Correlatori:
Armagan Tarim 4C, Cork - Irlanda
Brahim Hnich 4C, Cork - Irlanda

La teoria delle scorte

- Il problema del lotto economico (Ford W. Harris 1915)
  - bilanciare costi di acquisto e di stoccaggio in presenza di una domanda costante nel tempo e di un determinato costo fisso per ogni acquisto.

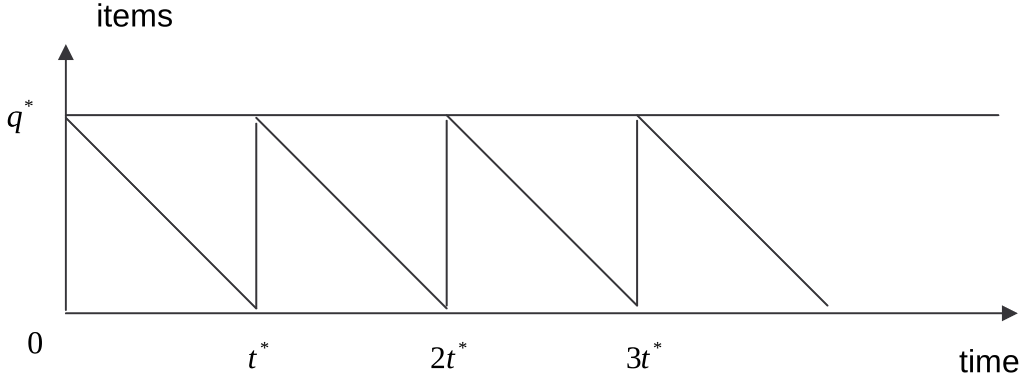


$$t^* = \sqrt{\frac{2k}{dh}}$$

k = costo fisso di produzione
d = domanda
h = costo di stoccaggio unitario

La teoria delle scorte

- Il problema del lotto economico (Ford W. Harris 1915)
  – bilanciare costi di acquisto e di stoccaggio in presenza di una domanda costante nel tempo e di un determinato costo fisso per ogni acquisto.

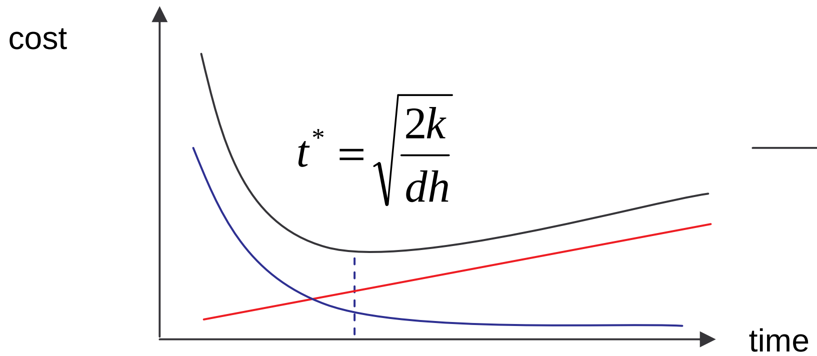


Quantità ottima per ordine: $q^* = \sqrt{\dfrac{2dk}{h}}$

Motivazioni

- ***Davis (1993):*** *il 60% degli investimenti impegnati nel sistema di produzione e distribuzione della Hewlett-Packard sono attribuibili ad incertezza della domanda da parte del mercato*

- *Come far fronte all'incertezza della domanda?*
  - *gestione delle scorte*
  - *gestione ottima dei costi di produzione/acquisto e stoccaggio*



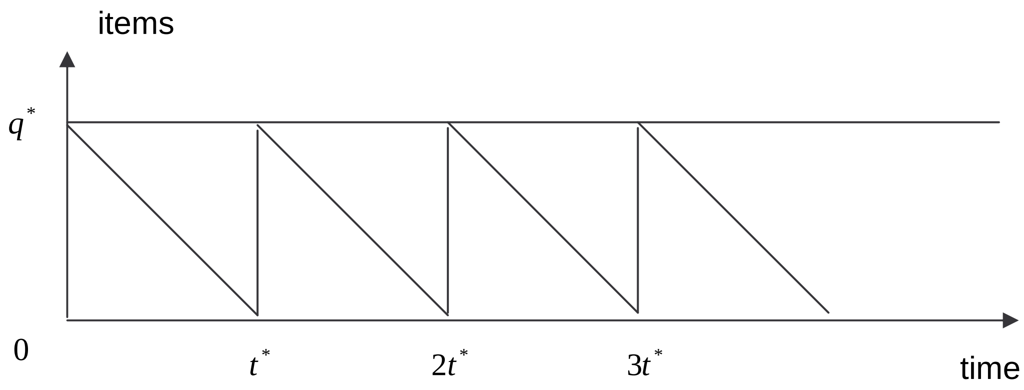
Lotto Economico!

La soluzione presentata

- periodo ottimo di riordino: t^*
- quantità ottima di riordino: q^*

- *politica ottima:* domanda esattamente soddisfatta in ogni ciclo di rifornimento

- algoritmo di risoluzione: $q^* = \sqrt{\dfrac{2dk}{h}}$ $\quad t^* = \sqrt{\dfrac{2k}{dh}}$



Lotto economico

domanda stocastica

Scarf (1960)
(s,S) → politica ottima

domanda statica

domanda dinamica

soluzione
euristica

Bookbinder & Tan (1988):
strategia euristica a due fasi
static-dynamic uncertainty, politica (R,S)

soluzione
ottima

Tarim & Kingsman (2003)
modello MIP, politica (R,S),
static-dynamic uncertainty

Tarim & Smith (2005)
modello CP, politica (R,S),
static-dynamic uncertainty

domanda deterministica

domanda statica

EOQ

domanda dinamica

Wagner - Whitin

Lotto economico

domanda stocastica

Scarf (1960)
(s,S) → politica ottima

domanda statica

domanda dinamica

soluzione euristica

Bookbinder & Tan (1988):
strategia euristica a due fasi
static-dynamic uncertainty, politica (R,S)

soluzione ottima

Tarim & Kingsman (2003)
modello MIP, politica (R,S),
static-dynamic uncertainty

Tarim & Smith (2005)
modello CP, politica (R,S),
static-dynamic uncertainty

domanda deterministica

domanda statica

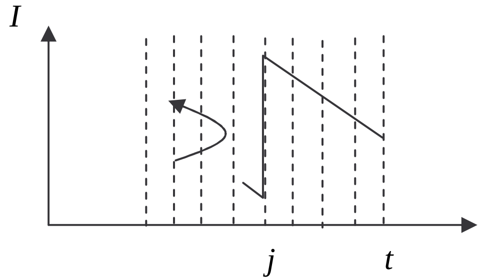
EOQ

domanda dinamica

Wagner - Whitin

Domanda deterministica e dinamica: Wagner & Whitin (1958)

$$F(t) = \min\begin{bmatrix} \min\limits_{1\le j<t}\left[s_j + \sum_{h=j}^{t-1}\sum_{k=h+1}^{t} i_h d_k + F(j-1)\right] \\ s_t + F(t-1) \end{bmatrix}$$



$\delta_t = 1$

$i_j = 1$

$F(0) = 0$

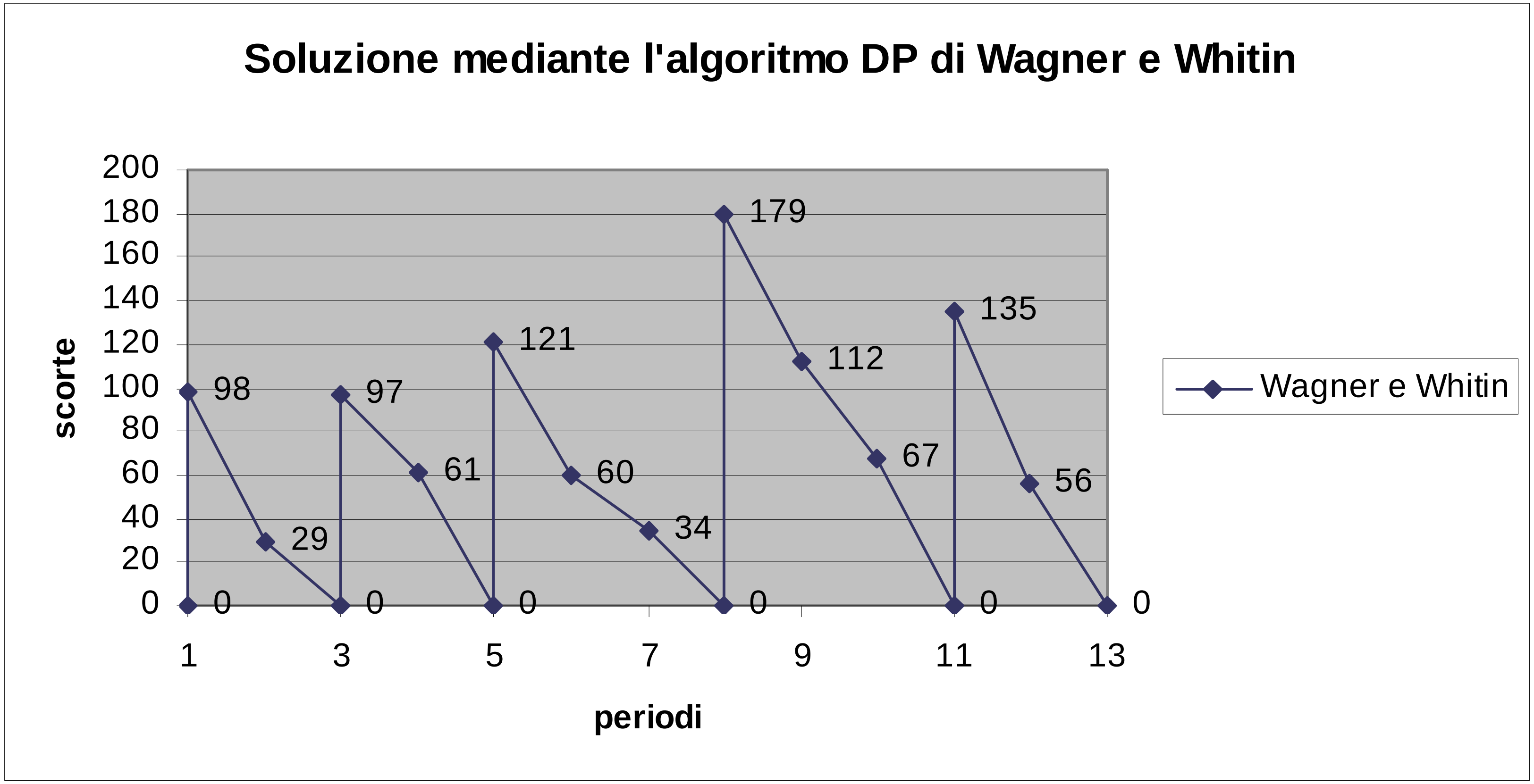
$F(1) = s_1$

(mese) t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
costo ord. s_j domanda d_j	85 69	102 29	102 36	101 61	98 61	114 26	105 34	86 67	119 45	110 67	98 79	114 56
	85	187 114	216 223 186	287 277	375 348	462 401 400	505 496 469 502	555 572	674 600	710 741 734	808 789	903 864 901
min cost. politica ott.[1]	85 1	114 12	186 123	277 34	384 45	400 456	469 567	555 8	600 89	710 10	789 10, 11	864 11, 12

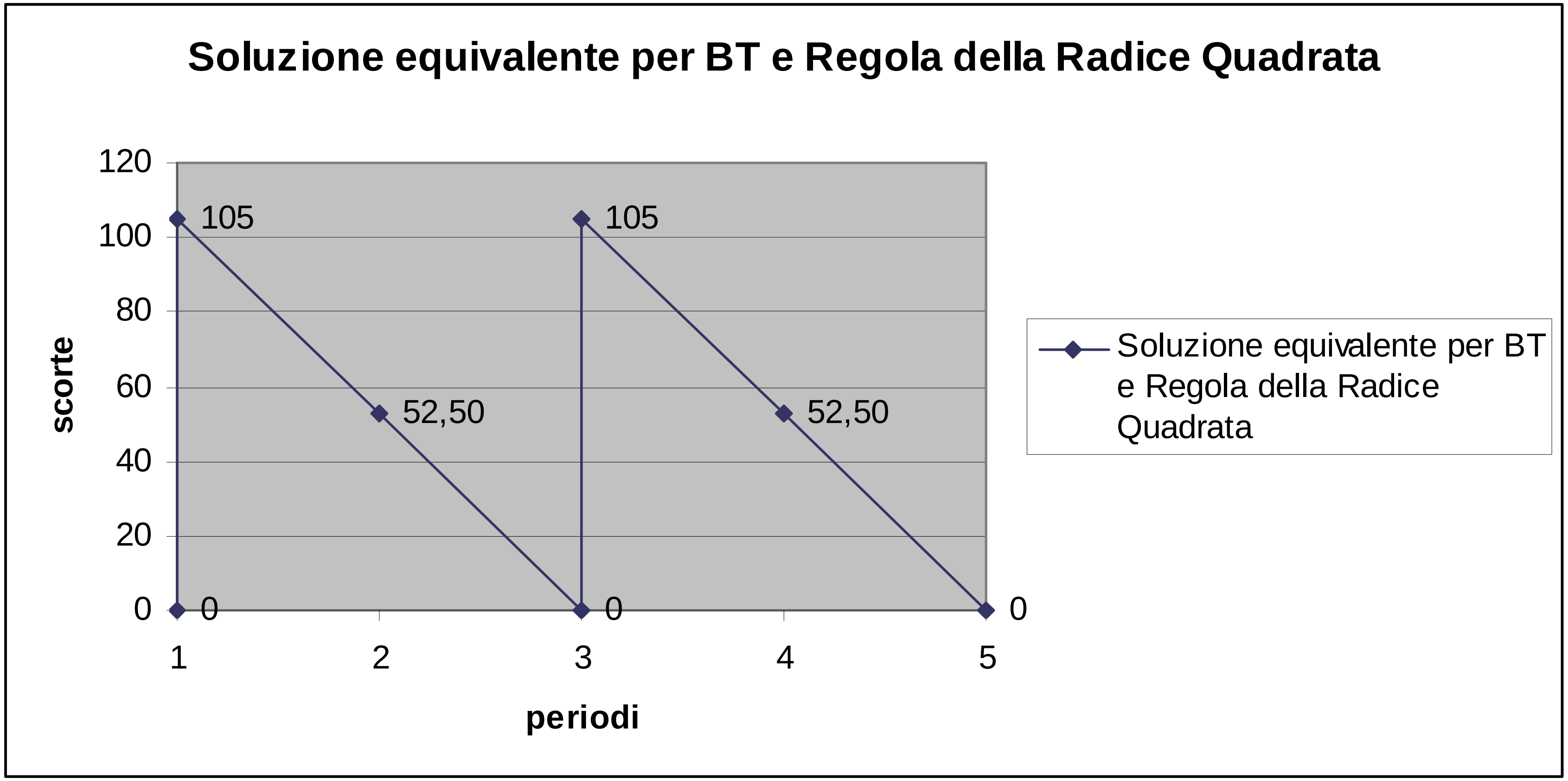
Complessità: N(N+1)/2 nel caso peggiore

[1] Viene mostrato solo l'ultimo periodo di ordinazione; 567 indica che la politica ottima per i periodi da 1 a 7 consiste nell'ordinare nel periodo 5 per soddisfare d_5, d_6, d_7, adottando una politica ottima per i periodi da 1 a 4 considerati separatamente (*planning horizon theorem*).

Domanda deterministica e dinamica: Wagner & Whitin



Domanda deterministica e dinamica: Wagner & Whitin



Lotto economico

domanda stocastica

Scarf (1960)
(s,S) → politica ottima

domanda statica

domanda dinamica

soluzione
euristica

Bookbinder & Tan (1988):
strategia euristica a due fasi
static-dynamic uncertainty, politica (R,S)

soluzione
ottima

Tarim & Kingsman (2003)
modello MIP, politica (R,S),
static-dynamic uncertainty

Tarim & Smith (2005)
modello CP, politica (R,S),
static-dynamic uncertainty

domanda deterministica

domanda statica

EOQ

domanda dinamica

Wagner - Whitin

Domanda stocastica

- *Esaurimento scorte*:
  - **penalizzazione nella funzione obiettivo**: si rappresenta il mancato guadagno come un costo
  - **assegnamento di un livello di servizio in termini percentuali**: dunque si assume che l'evento *scorte esaurite* si verifichi con una certa probabilità (tipicamente bassa < 5%) e lo si trascura nel modello

Domanda stocastica e statica

Politica ottima:
(s,S) – Scarf 1960

k = costo fisso di produzione
h = costo di stoccaggio unitario

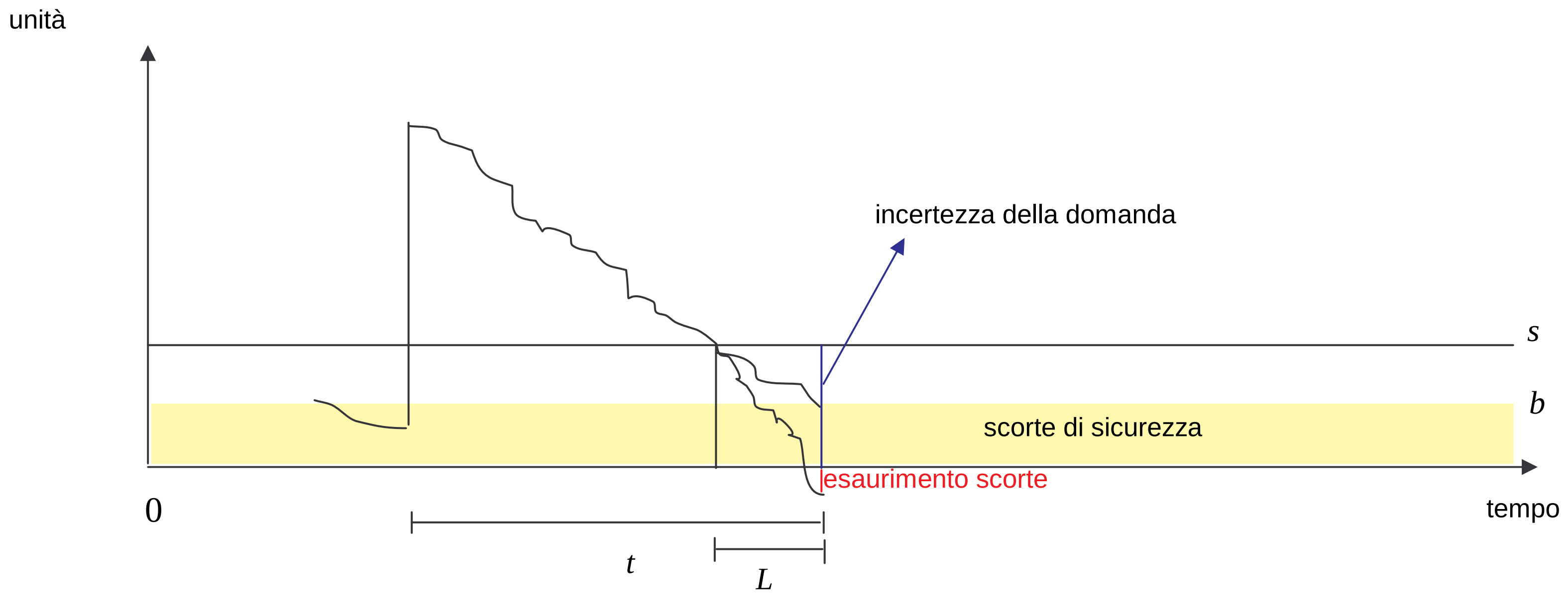
$b = z \cdot \sigma_L$ scorte di sicurezza

L tempo di arrivo delle merci

σ_L deviazione standard della domanda nell'intervallo *L*

z livello di servizio

$\tilde{d}$ val. atteso per la domanda per periodo



Domanda stocastica e statica

Politica ottima:
(s,S) – Scarf 1960

k = costo fisso di produzione
h = costo di stoccaggio unitario

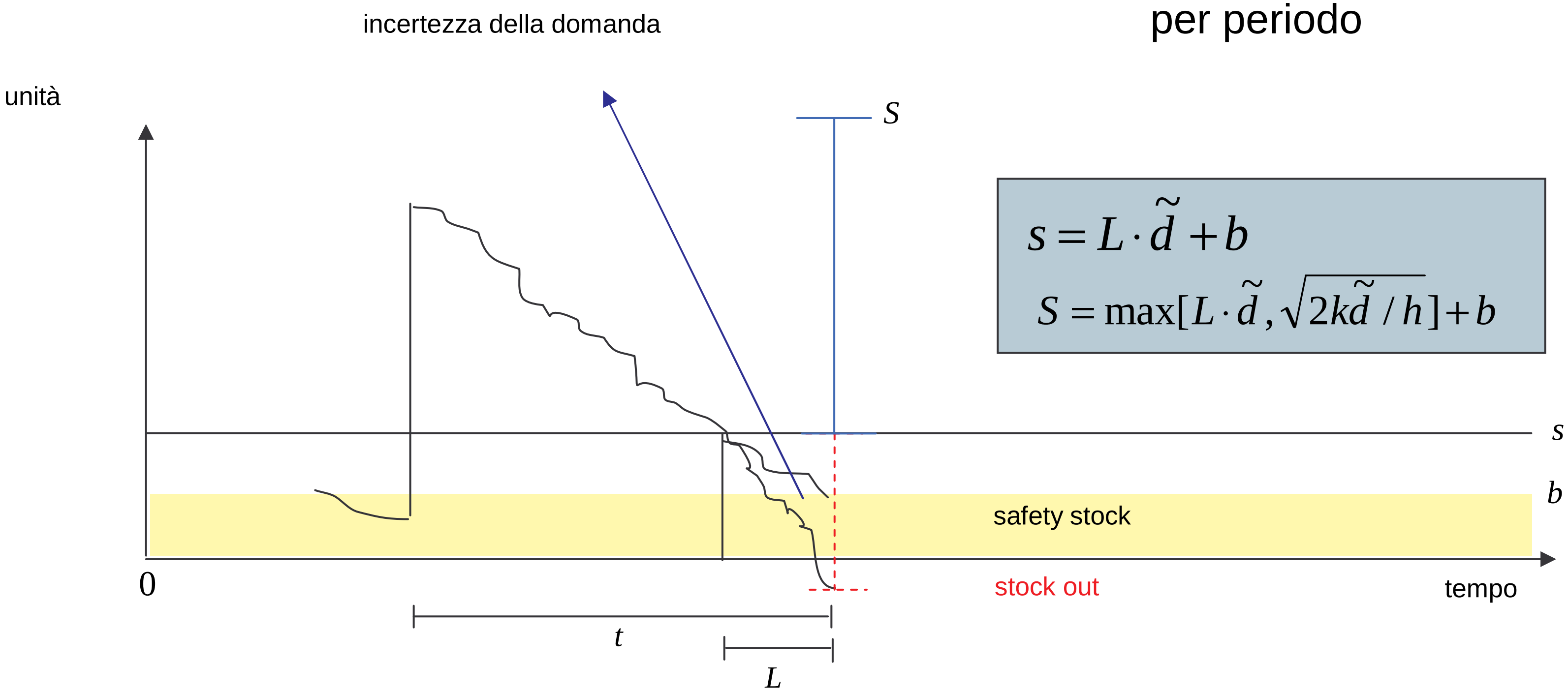
$b = z \cdot \sigma_L$ scorte di sicurezza

L tempo di arrivo delle merci

σ_L deviazione standard della domanda nell'intervallo *L*

z livello di servizio

$\tilde{d}$ val. atteso per la domanda per periodo



$$s = L \cdot \tilde{d} + b$$

$$S = \max[L \cdot \tilde{d}, \sqrt{2k\tilde{d}/h}] + b$$

Lotto economico

domanda stocastica

Scarf (1960)
(s,S) → politica ottima

domanda statica

domanda dinamica

soluzione euristica

Bookbinder & Tan (1988):
strategia euristica a due fasi
static-dynamic uncertainty, politica (R,S)

soluzione ottima

Tarim & Kingsman (2003)
modello MIP, politica (R,S),
static-dynamic uncertainty

Tarim & Smith (2005)
modello CP, politica (R,S),
static-dynamic uncertainty

domanda deterministica

domanda statica

EOQ

domanda dinamica

Wagner - Whitin

Domanda stocastica e dinamica Bookbinder & Tan

- Static uncertainty →
  - tutte le decisioni vengono prese all'inizio dell'orizzonte degli eventi
    - istanti di ordinazione
    - quantità degli ordini
  - viene incontro alle esigenze aziendali
  - si basa sulla costruzione di un modello deterministico equivalente risolto con le tecniche note:

    algoritmo DP Wagner & Whitin

Domanda stocastica e dinamica Bookbinder & Tan

- Dynamic uncertainty →

  – Le decisioni sono prese man mano che le domande divengono note: ***wait-and-see***
    - periodo dopo periodo si effettuano ordini in funzione dei livelli di servizio richiesti

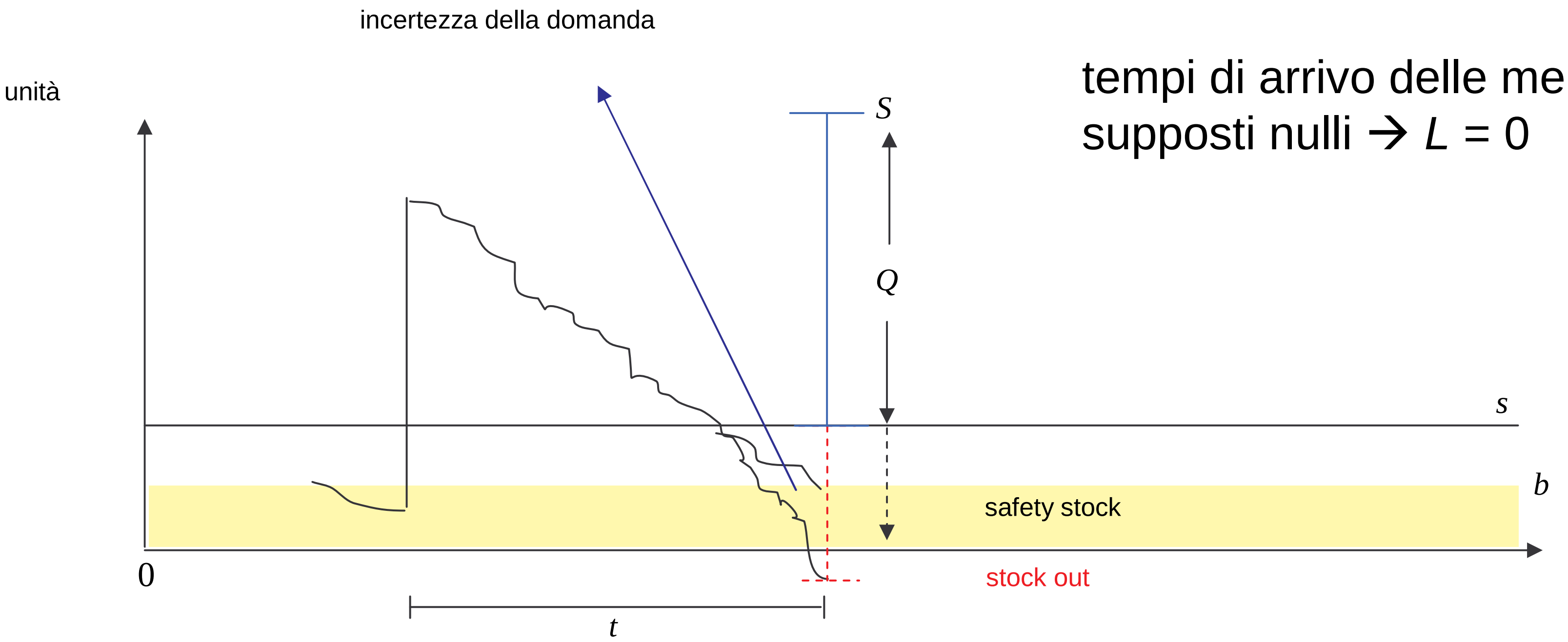
  – Scomoda in termini di politiche aziendali e poco adatta per applicazioni reali (politica *nervosa*)

  – Può tornare utile in scenari *Just In Time*

Domanda stocastica e dinamica Bookbinder & Tan

- Static-Dynamic Uncertainty →
  - Politica (R,S)
    - R → Istanti in cui fissare gli ordini
    - S → Livelli a cui portare le scorte in seguito ad un ordine

tempi di arrivo delle merci supposti nulli → L = 0



Domanda stocastica e dinamica Bookbinder & Tan

- Static-Dynamic Uncertainty →
  - Modello per politica (R,S) difficile da risolvere in modo completo
    - ***Silver 1978****: trovare la soluzione ottima per la versione stocastica e dinamica del problema del lotto economico risulta proibitivo dal punto di vista computazionale*
  - Approccio euristico a due fasi
    - Determinazione dell'insieme R (Wagner & Whitin)
    - Determinazione dell'insieme S (problema LP deterministico)

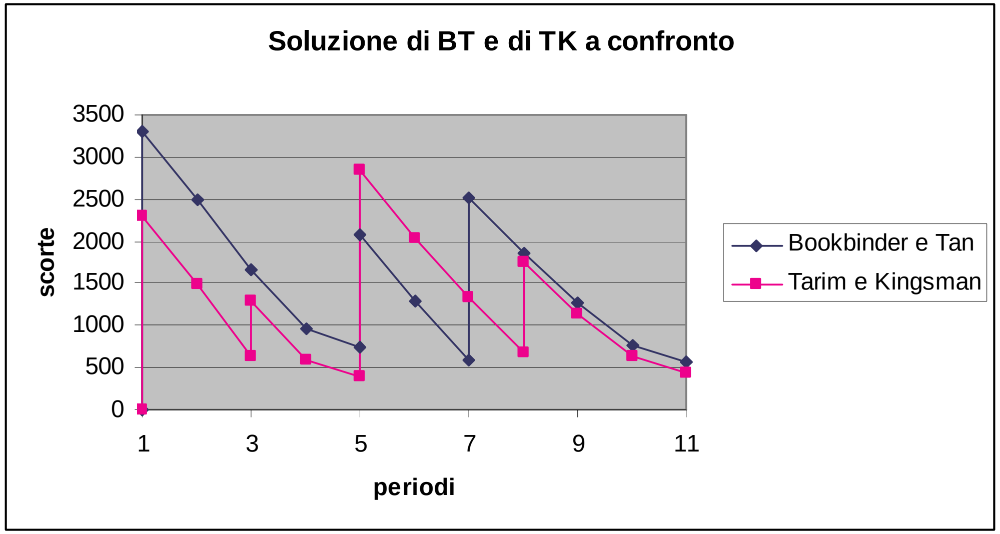
Lotto economico

- domanda stocastica
  - Scarf (1960)
    (s,S) → politica ottima
    - domanda statica
    - domanda dinamica
      - soluzione euristica: Bookbinder & Tan (1988):
        strategia euristica a due fasi
        static-dynamic uncertainty, politica (R,S)
      - soluzione ottima:
        - Tarim & Kingsman (2003)
          modello MIP, politica (R,S),
          static-dynamic uncertainty
        - Tarim & Smith (2005)
          modello CP, politica (R,S),
          static-dynamic uncertainty
- domanda deterministica
  - domanda statica: EOQ
  - domanda dinamica: Wagner - Whitin

Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Kingsman

- Modello MIP → completo
  - il costo totale atteso per la strategia ottenuta con il modello di Bookbinder e Tan è 19704, mentre per quella di Tarim e Kingsman esso risulta essere 19404

Periodo(k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E[d_k]$	800	850	700	200	800	700	650	600	500	200



$c_v = \sigma_t / \mu_t = 0.333$

$a = 2500$

$h = 1$

$\alpha = 0.95 \quad (z_{\alpha=0.95} = 1.645)$

Lotto economico

- domanda stocastica
  - Scarf (1960)
    (s,S) → politica ottima
    - domanda statica
    - domanda dinamica
      - soluzione euristica
        - Bookbinder & Tan (1988):
          strategia euristica a due fasi
          static-dynamic uncertainty, politica (R,S)
      - soluzione ottima
        - Tarim & Kingsman (2003)
          modello MIP, politica (R,S),
          static-dynamic uncertainty
        - Tarim & Smith (2005)
          modello CP, politica (R,S),
          static-dynamic uncertainty
- domanda deterministica
  - domanda statica
    - EOQ
  - domanda dinamica
    - Wagner - Whitin

Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

- Modello CP →
  - completo
  - meno vincoli $2N$ vs $(N^2+5N)/2$
  - Meno variabili decisionali $3N$ vs $(N^2+9N)/2$
  - Tipicamente la risoluzione di tale modello implica l'esplorazione di un numero di nodi maggiore rispetto al MIP, tuttavia i tempi di esecuzione sono migliori:
    - MIP → rilassamento continuo su ogni nodo!

Domanda stocastica e dinamica Tarim & Smith

funzione di distribuzione cumulativa

$$\Phi[i,j] = G^{-1}_{d_j + d_{j+1} + \ldots + d_i}(\alpha) - \sum_{k=j}^{i} \tilde{d}_k$$

- Modello CP →
  - programmazione stocastica

min $$E[TC] = \sum_{t=1}^{N} \left(a\delta_t + h\tilde{I}_t \right)$$

s.t.

$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, N$$

$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} > 0 \Rightarrow \delta_t = 1 \qquad t = 1, \ldots, N$$

$$\tilde{I}_t \geq \Phi[t, \max_{j \in [1..t]} j\delta_j] \qquad t = 1, \ldots, N$$

$$\tilde{I}_t \in \mathrm{Z}^+ \cup \{0\} \qquad \delta_t \in \{0,1\} \qquad t = 1, \ldots, N$$

Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

funzione di distribuzione cumulativa

$$\Phi[i,j] = G^{-1}_{d_j + d_{j+1} + \ldots + d_i}(\alpha) - \sum_{k=j}^{i} \tilde{d}_k$$

- Modello CP →
  - programmazione stocastica

min $$E[TC] = \sum_{t=1}^{N} \left(a\delta_t + h\tilde{I}_t \right)$$

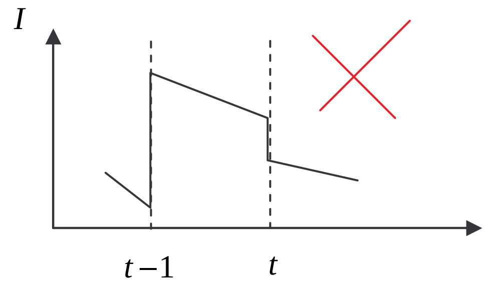
s.t.

$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} \geq 0 \qquad t = 1,\ldots,N$$

$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} > 0 \Rightarrow \delta_t = 1 \qquad t = 1,\ldots,N$$

$$\tilde{I}_t \geq \Phi[t, \max_{j \in [1..t]} j\delta_j] \qquad t = 1,\ldots,N$$

$$\tilde{I}_t \in \mathrm{Z}^+ \cup \{0\} \qquad \delta_t \in \{0,1\} \qquad t = 1,\ldots,N$$



restituzione delle merci vietata!

Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

- Modello CP →
  - programmazione stocastica

funzione di distribuzione cumulativa

$$\Phi[i,j] = G^{-1}_{d_j + d_{j+1} + \ldots + d_i}(\alpha) - \sum_{k=j}^{i} \tilde{d}_k$$

min $$E[TC] = \sum_{t=1}^{N} \left(a\delta_t + h\tilde{I}_t \right)$$

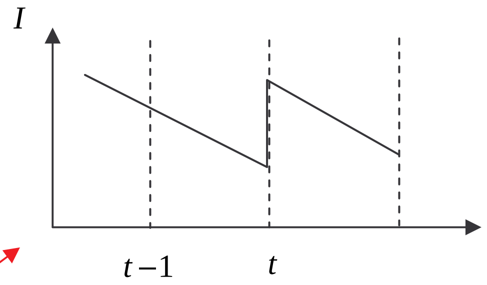
s.t.

$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, N$$

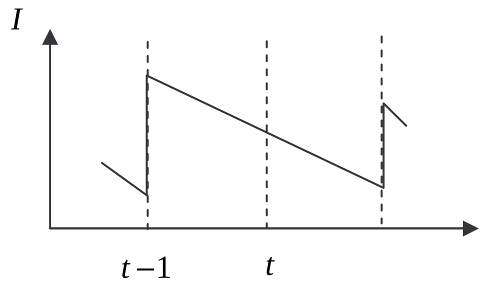
$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} > 0 \Rightarrow \delta_t = 1 \qquad t = 1, \ldots, N$$

$$\tilde{I}_t \geq \Phi[t, \max_{j \in [1..t]} j\delta_j] \qquad t = 1, \ldots, N$$

$$\tilde{I}_t \in \mathrm{Z}^+ \cup \{0\} \qquad \delta_t \in \{0,1\} \qquad t = 1, \ldots, N$$



$\delta_t = 1$



$\delta_t = 1 \wedge \delta_t = 0$

Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

funzione di distribuzione cumulativa

$$\Phi[i, j] = G^{-1}_{d_j + d_{j+1} + \ldots + d_i}(\alpha) - \sum_{k=j}^{i} \tilde{d}_k$$

- Modello CP →
  - programmazione stocastica

min $\quad E[TC] = \sum_{t=1}^{N} \left(a\delta_t + h\tilde{I}_t \right)$

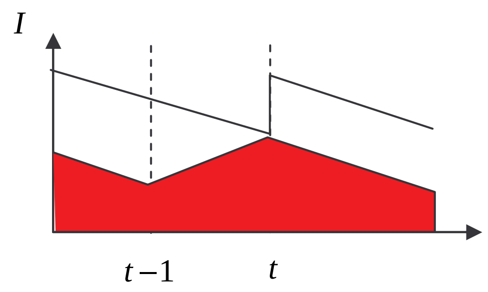
s.t.

$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, N$

$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} > 0 \Rightarrow \delta_t = 1 \qquad t = 1, \ldots, N$

$\tilde{I}_t \geq \Phi[t, \max_{j \in [1..t]} j\delta_j] \qquad t = 1, \ldots, N$

$\tilde{I}_t \in \mathrm{Z}^+ \cup \{0\} \qquad \delta_t \in \{0,1\} \qquad t = 1, \ldots, N$



livello di servizio

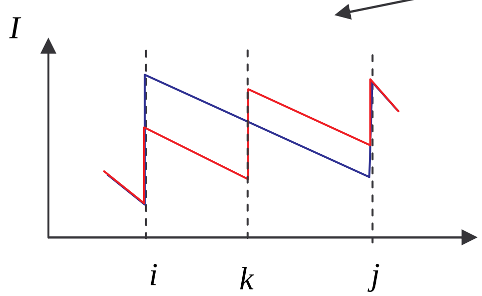
Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

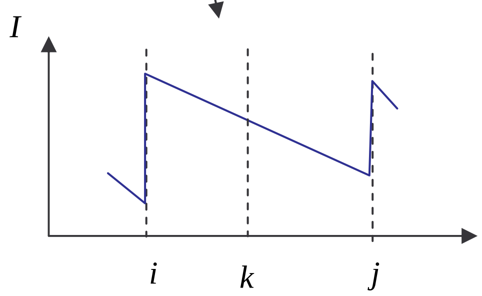
- Tecniche di filtraggio per i domini delle variabili decisionali:

  – Primo metodo di riduzione
    - prima di iniziare la ricerca i domini delle variabili decisionali I_t vengono opportunamente ridotti ai soli valori candidati ad essere parte di una soluzione ottima
    - Stabilisce degli UB sulla lunghezza dei possibili cicli di rifornimento candidati ad essere parte della soluzione ottima

$\forall k \in \{i,\ldots, j-1\}$

$$\left(\underline{c(i,k)+c(k+1,j)>c(i,j)}\right)\vee\left(\underline{b(i,k)>R(k+1,j)}\right)$$



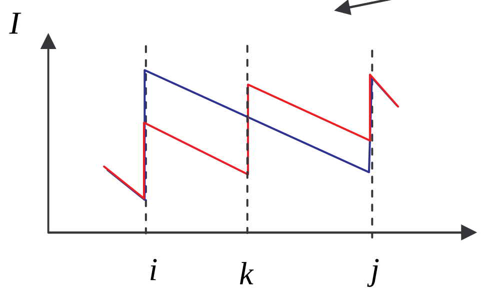


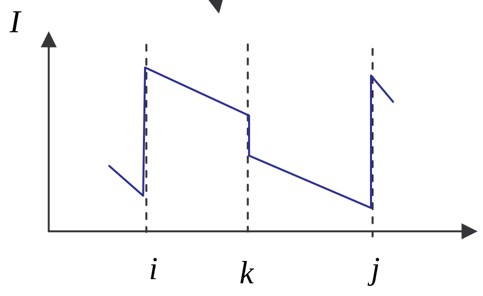
Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

- Tecniche di filtraggio per i domini delle variabili decisionali:
  - Primo metodo di riduzione
    - prima di iniziare la ricerca i domini delle variabili decisionali I_t vengono opportunamente ridotti ai soli valori candidati ad essere parte di una soluzione ottima
    - Stabilisce degli UB sulla lunghezza dei possibili cicli di rifornimento candidati ad essere parte della soluzione ottima

$\forall k \in \{i,\dots, j-1\}$

$$\big(c(i,k)+c(k+1, j) > c(i, j)\big) \vee \big(b(i,k) > R(k+1, j)\big)$$



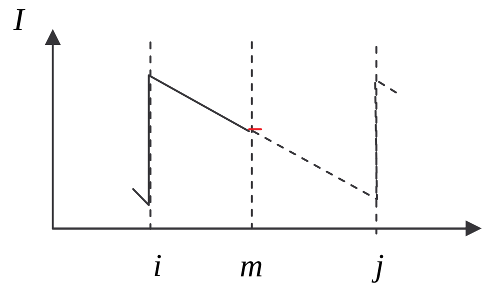


Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

- Tecniche di filtraggio per i domini delle variabili decisionali:
  - Primo metodo di riduzione
    - prima di iniziare la ricerca i domini delle variabili decisionali I_t vengono opportunamente ridotti ai soli valori candidati ad essere parte di una soluzione ottima
    - Stabilisce degli UB sulla lunghezza dei possibili cicli di rifornimento candidati ad essere parte della soluzione ottima

$\forall k \in \{i,\ldots, j-1\}$

$$\left(c(i,k)+c(k+1, j) > c(i, j)\right) \vee \left(b(i,k) > R(k+1, j)\right)$$



$l = m$

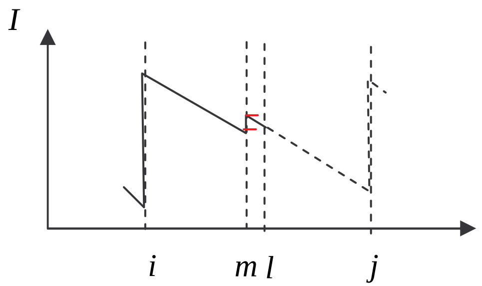
$\forall m \in T(i, j)$

$$R_m^* \in R_m^S = \bigcup\{\tau \mid \tau = R(i,l) - \sum_{t=i}^{m-1} \tilde{d}_t, l = m,\ldots, j\}$$

Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

- Tecniche di filtraggio per i domini delle variabili decisionali:
  - Primo metodo di riduzione
    - prima di iniziare la ricerca i domini delle variabili decisionali I_t vengono opportunamente ridotti ai soli valori candidati ad essere parte di una soluzione ottima
    - Stabilisce degli UB sulla lunghezza dei possibili cicli di rifornimento candidati ad essere parte della soluzione ottima

$\forall k \in \{i,\ldots, j-1\}$ $\qquad$ $\big(c(i,k)+c(k+1,j) > c(i,j)\big) \vee \big(b(i,k) > R(k+1,j)\big)$



$l = m+1$

$\forall m \in T(i,j)$

$R_m^* \in R_m^S = \bigcup \{\tau \mid \tau = R(i,l) - \sum_{t=i}^{m-1} \tilde{d}_t, l = m,\ldots, j\}$

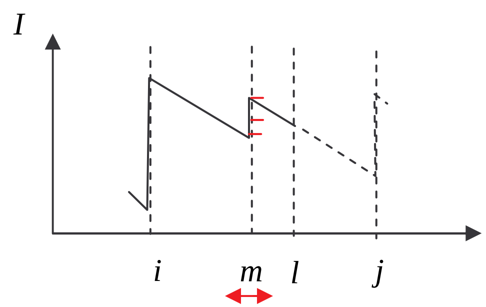
Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

- Tecniche di filtraggio per i domini delle variabili decisionali:
  - Primo metodo di riduzione
    - prima di iniziare la ricerca i domini delle variabili decisionali I_t vengono opportunamente ridotti ai soli valori candidati ad essere parte di una soluzione ottima
    - Stabilisce degli UB sulla lunghezza dei possibili cicli di rifornimento candidati ad essere parte della soluzione ottima

$\forall k \in \{i, \ldots, j-1\}$ $\quad$ $\left(c(i,k) + c(k+1, j) > c(i, j)\right) \vee \left(b(i,k) > R(k+1, j)\right)$

$\forall m \in T(i, j)$

$$R_m^* \in R_m^S = \bigcup \{\tau \mid \tau = R(i,l) - \sum_{t=i}^{m-1} \tilde{d}_t, l = m, \ldots, j\}$$

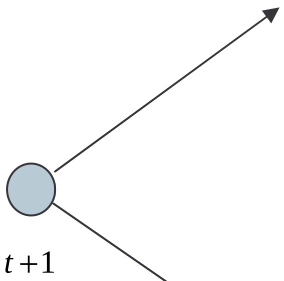


$l = m + 2$

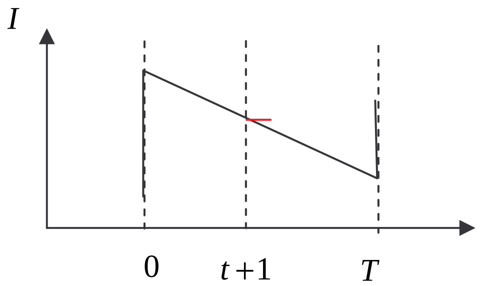
Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

- Tecniche di filtraggio per i domini delle variabili decisionali:

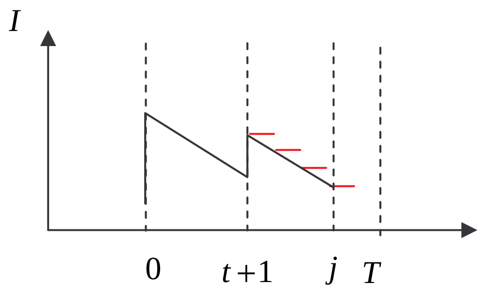
  – Secondo metodo di riduzione
    - Si considerano tutti i possibili scenari legati alle decisioni sugli I_t ordini δ_t , aggiungendo man mano ai domini i valori delle scorte per tali scenari verosimili:



– il livello di chiusura in *t è* pari a quello di apertura in *t+1*



– I livelli sono differenti: livello di chiusura in *t* < livello di apertura in *t+1* → ordine in *t+1*



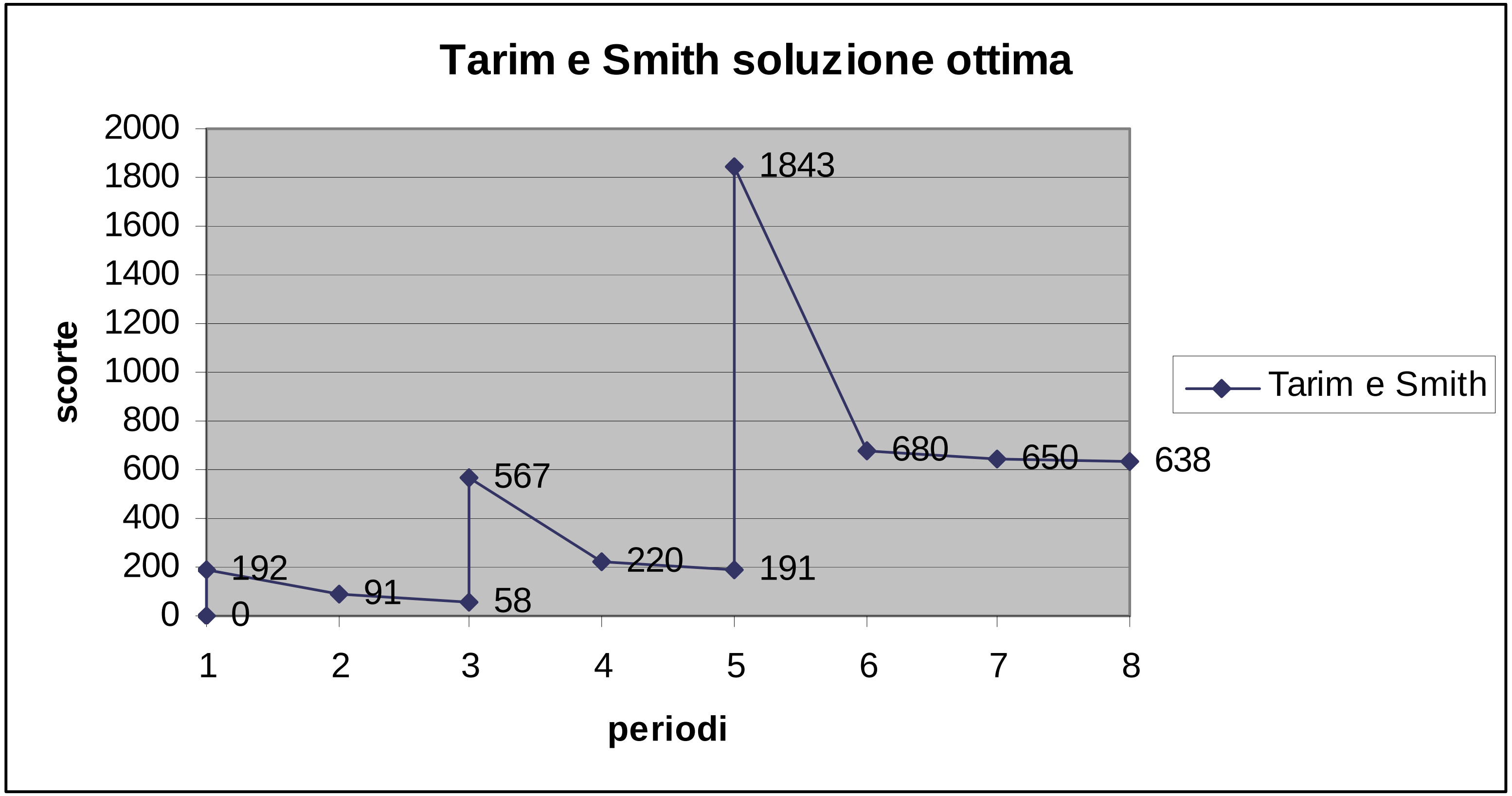
Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith

- Riduzione ulteriore:
  - Intersezione dei risultati dei due metodi: il sottoinsieme dei valori delle scorte candidati ad essere parte della soluzione ottima è ulteriormente ristretto

Periodo	1	2	3	4	5	6	7
$\overline{d_t}$	101	33	347	29	1163	30	12

	$I_i^{S_I}$	$I_i^{S_{II}}$	$I_i^{S_I} \cap I_i^{S_{II}}$	$\tilde{I}_i^*$
1	{55,91}	{55,91}	{55,91}	91
2	{18,22,58}	{22,58,538,568}	{22,58}	58
3	{190,220}	{190,191,220,221,1858,1888,1900}	{190,220}	220
4	{16,161,191}	{161,162,191,192,1801,1829,1831,1843,1859,1871}	{161,191}	191
5	{638,668,680}	{638,666,668,680,696,708}	{638,668,680}	680
6	{16,30,608,638,650}	{608,636,638,650,666,678}	{608,638,650}	650
7	{7,18,596,626,638}	{596,624,626,638,654,666}	{596,626,638}	638

Domanda stocastica e dinamica
Tarim & Smith



Domanda stocastica e dinamica
Estensioni…

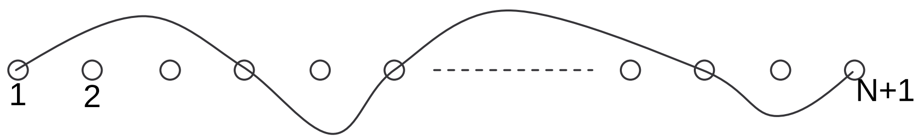
- Riduzione dinamica dei domini durante la ricerca

  – sfrutta la soluzione parziale disponibile in un dato nodo dell’albero decisionale per ridurre i domini delle variabili decisionali eliminando i valori non ammissibili rispetto ad essa

  – tre tecniche sviluppate:
    - ***rilassamento*** mediante ***programmazione dinamica***
    - riduzione basata sul ***merging lemma***
    - ***estensione*** al caso dinamico delle ***tecniche di filtraggio a priori*** presentate da Tarim e Smith

Domanda stocastica e dinamica
Estensioni…

- Rilassamento mediante programmazione dinamica
  - ***Branch and Bound***



  - Dijkstra per SPP in

$$N \cdot (N+1)/2$$

j

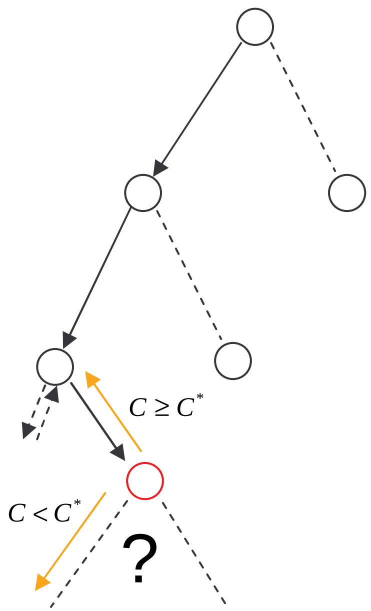
i

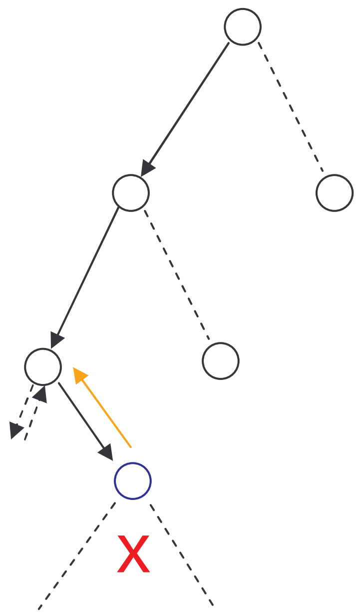
∞	$c(1,1)$	- - - - - -	$c(1, j-1)$	$c(1, N)$
∞	∞	$c(i, j-2)$	$c(i, j-1)$	$c(i, N)$
∞	∞	∞	$c(i+1, j-1)$	$\vdots$
∞	∞	∞	∞	$c(N, N)$
∞	∞	∞	∞	∞

N+1

Domanda stocastica e dinamica
Estensioni…

- Rilassamento mediante programmazione dinamica
  - ***Branch and Bound***

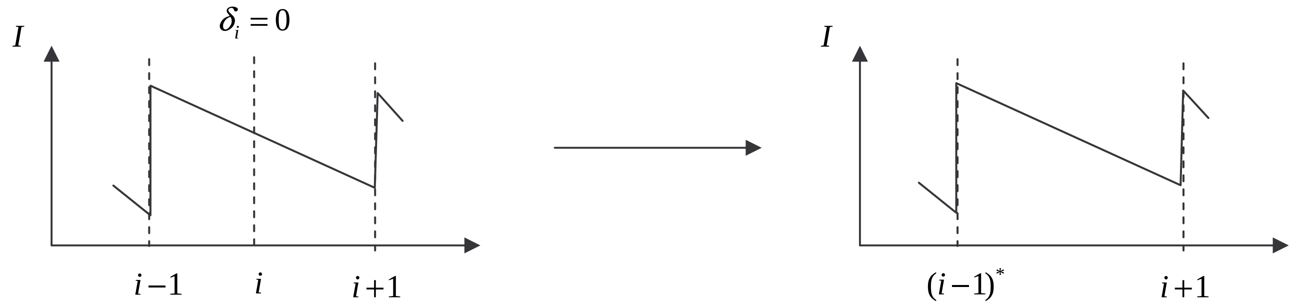




Domanda stocastica e dinamica
Estensioni…

Merging lemma:

- *data una soluzione parziale, se in un certo periodo **i** non è previsto un rifornimento, è possibile ottenere una formulazione equivalente dell'istanza del problema accorpando tale periodo **i** al precedente.*



- *estensione al caso di più periodi*
  - *Il valor medio della domanda nel nuovo periodo che accorpa i precedenti sarà*

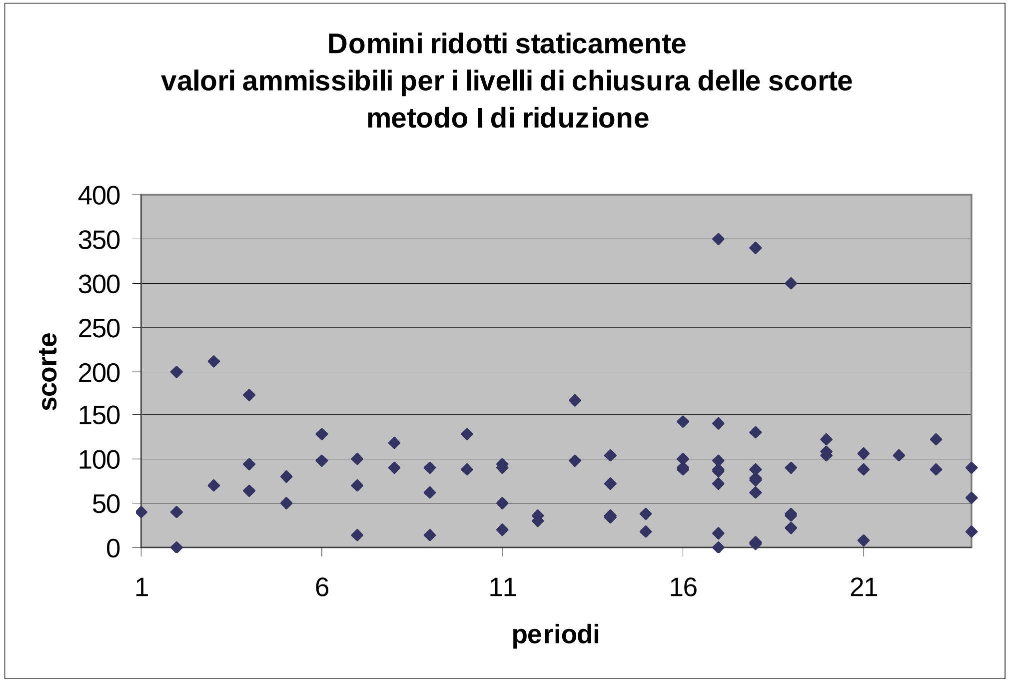
$$\mu_{k'} = \sum_{t=i}^{j} \mu_t$$

  - *La deviazione standard della domanda sarà* $\sigma_{k'} = \sqrt{\sum_{t=i}^{j} \sigma_t^2}$

Domanda stocastica e dinamica
Estensioni…

Merging lemma

Periodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\overline{d_t}$	73	0	128	116	92	180	28	164	28	161	37	57
Periodo	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\overline{d_t}$	181	62	34	161	2	10	40	192	17	190	163	32



Domanda stocastica e dinamica
Estensioni…

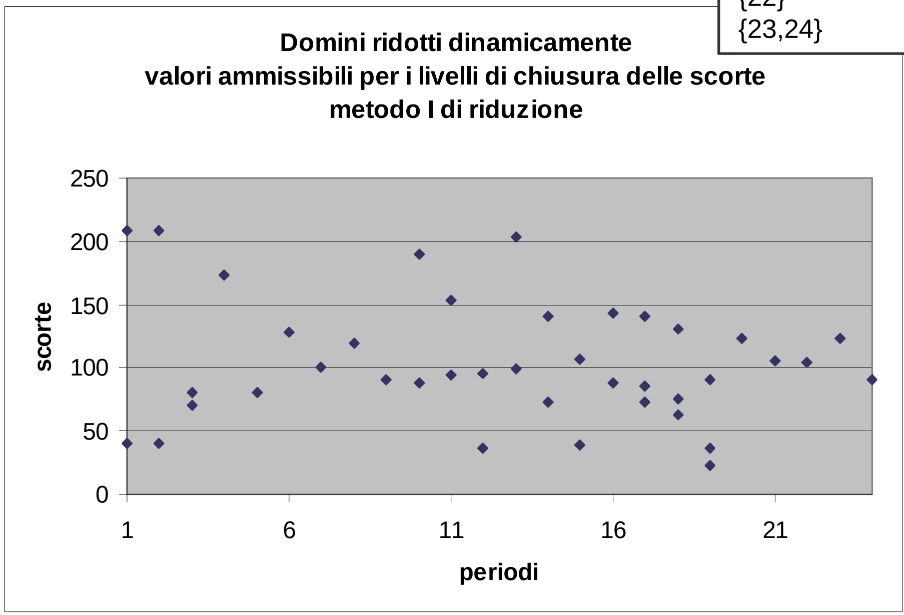
Merging lemma

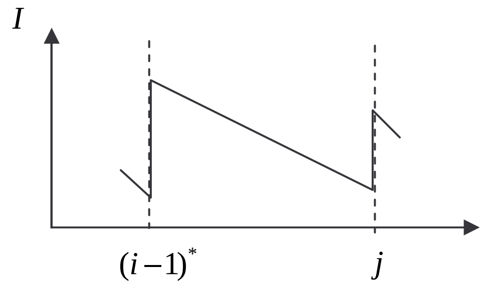
i	I_i^*	δ_i	i	I_i^*	δ_i
1	40	1	13	99	1
2	40	0	14	73	1
3	70	1	15	39	0
4	173	1	16	88	1
5	81	0	17	86	1
6	128	1	18	76	0
7	100	0	19	36	0
8	119	1	20	123	1
9	91	0	21	106	0
10	88	1	22	104	1
11	94	1	23	123	1
12	37	0	24	91	0

Domanda stocastica e dinamica Estensioni…

Merging lemma

i^*	$\overline{d_{i^*}}$	$(\sigma_{i^*} / coeff.\mathrm{var.})^2$	$I^*_{i^*}$
{1,2}	73	5329	{40,209}
{3}	128	16384	{70,81}
{4,5}	208	21920	{81}
{6,7}	208	33184	{100}
{8,9}	192	27680	{91}
{10}	161	25921	{88,190}
{11,12}	94	4618	{37,96}
{13}	181	32761	{99,203}
{14,15}	96	5000	{39,107}
{16}	161	25921	{88,143}
{17,18,19}	52	1704	{23,36,91}
{20,21}	209	37153	{106}
{22}	190	36100	{104}
{23,24}	195	27593	{91}



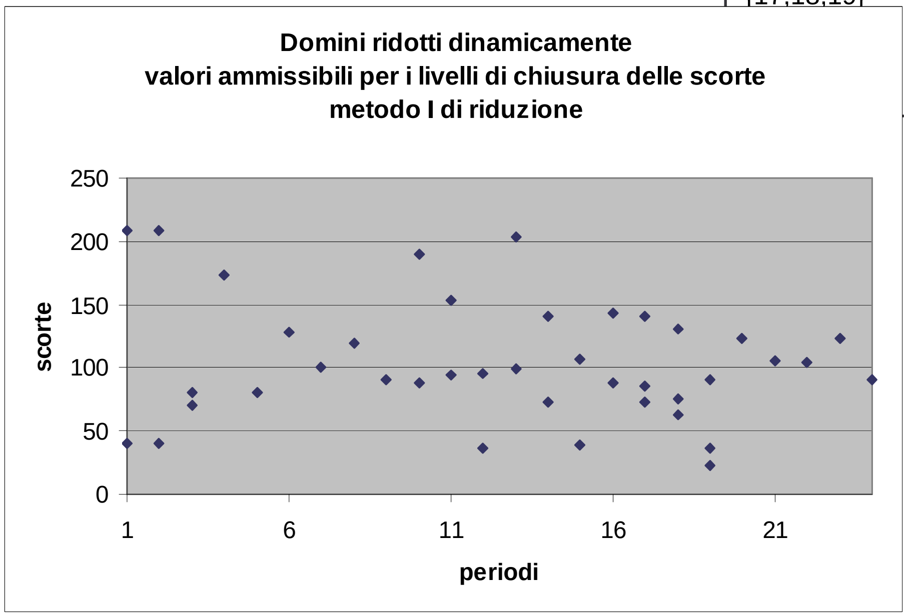


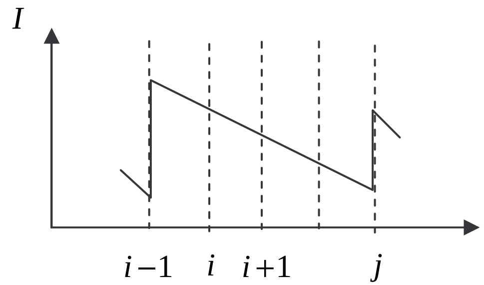
$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} = 0 \qquad t > i \wedge t < j$$

Domanda stocastica e dinamica
Estensioni…

Merging lemma

i^*	$\overline{d_{i^*}}$	$(\sigma_{i^*} / coeff.\mathrm{var.})^2$	$I^*_{i^*}$
{1,2}	73	5329	{$\underline{40}$,209}
{3}	128	16384	{$\underline{70}$,81}
{4,5}	208	21920	{$\underline{81}$}
{6,7}	208	33184	{$\underline{100}$}
{8,9}	192	27680	{$\underline{91}$}
{10}	161	25921	{$\underline{88}$,190}
{11,12}	94	4618	{$\underline{37}$,96}
{13}	181	32761	{$\underline{99}$,203}
{14,15}	96	5000	{$\underline{39}$,107}
{16}	161	25921	{$\underline{88}$,143}
{17,18,19}	52	1704	{23,$\underline{36}$,91}
	209	37153	{$\underline{106}$}
	190	36100	{$\underline{104}$}
	195	27593	{$\underline{91}$}





$$\Rightarrow \quad \tilde{I}_t + \tilde{d}_t = \tilde{I}_{t-1}$$

$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} = 0 \qquad t > i \wedge t < j$$

Domanda st
Es

Merging lemma

min $E[TC]=\sum_{t=1}^{N}\left(a\delta_t + h\tilde{I}_t\right)$

s.t.

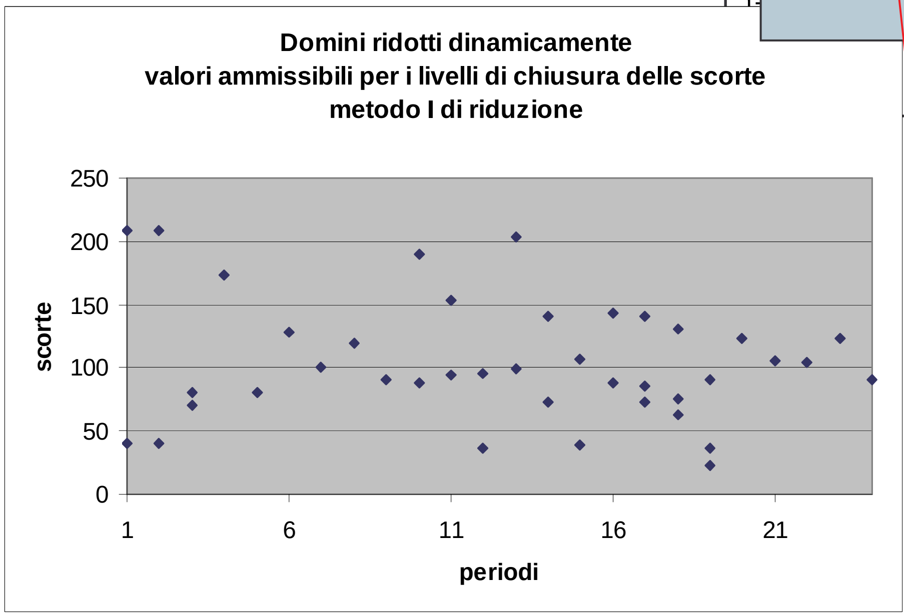
$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} \geq 0$ $\quad t=1,\ldots,N$

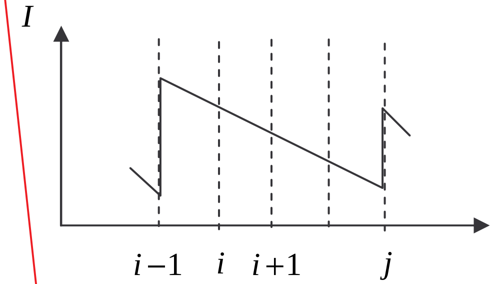
$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} > 0 \Rightarrow \delta_t = 1$ $\quad t=1,\ldots,N$

$\tilde{I}_t \geq \Phi[t, \max_{j\in[1..t]} j\delta_j]$ $\quad t=1,\ldots,N$

$\tilde{I}_t \in Z^+ \cup \{0\}$ $\quad \delta_t \in \{0,1\}$ $\quad t=1,\ldots,N$

	190	36100	{104}
	195	27593	{91}





$\Rightarrow \quad \tilde{I}_t + \tilde{d}_t = \tilde{I}_{t-1}$

$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} = 0 \qquad t > i \wedge t < j$

Domanda st... Es...

Merging lemma

min $\quad E[TC] = \sum_{t=1}^{N} \left(a\delta_t + h\tilde{I}_t \right)$

s.t.

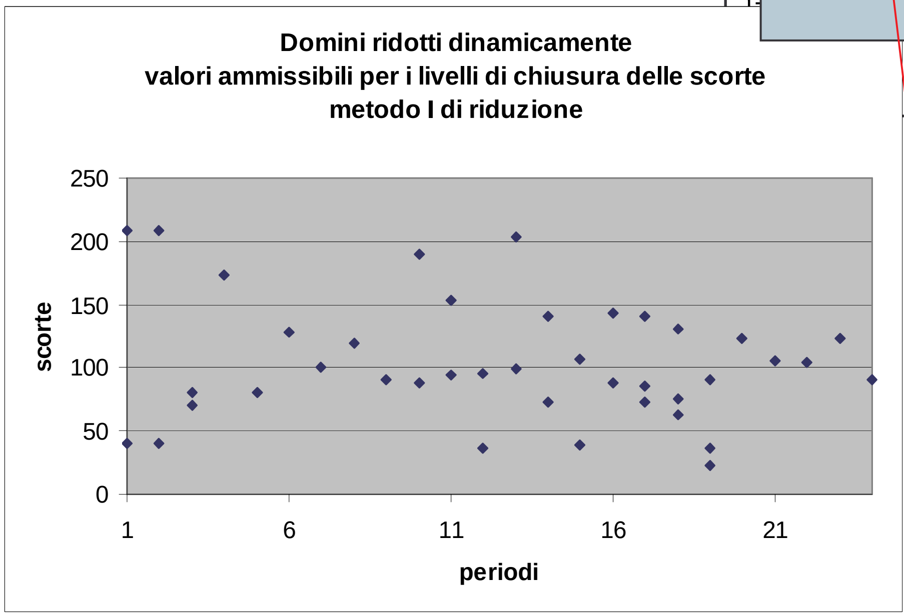
$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} \geq 0 \qquad\qquad t = 1,\dots,N$

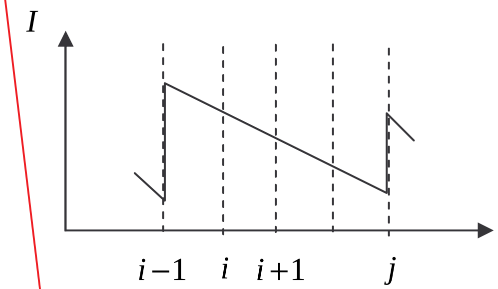
$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} > 0 \Rightarrow \delta_t = 1 \qquad\qquad t = 1,\dots,N$

$\tilde{I}_t \geq \Phi[t, \max_{j\in[1..t]} j\delta_j] \qquad\qquad t = 1,\dots,N$

$\tilde{I}_t \in Z^+ \cup \{0\} \qquad \delta_t \in \{0,1\} \qquad\qquad t = 1,\dots,N$

{1			
{3			
{4			
{6			
{8			
{1			
{1			
{1			
{1			
{1			
{1			
	190	36100	{104}
	195	27593	{91}





$$\Rightarrow \quad \tilde{I}_t + \tilde{d}_t = \tilde{I}_{t-1}$$

$$\tilde{I}_t + \tilde{d}_t - \tilde{I}_{t-1} = 0 \qquad t > i \wedge t < j$$

Domanda stocastica e dinamica Estensioni…

- Estensione dinamica al primo metodo di riduzione:

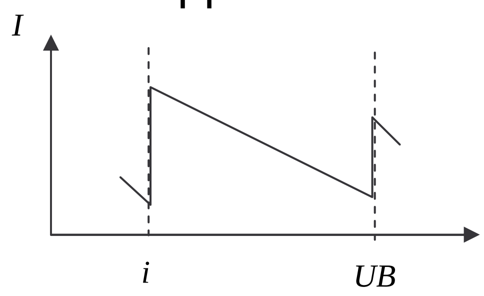
Periodo	1	2	3	4	5	6	7
$\overline{d}_t$	101	33	347	29	1163	30	12

i	$I_i^{S_I}$	$I_i^{S_{II}}$	$I_i^{S_I} \cap I_i^{S_{II}}$	$\widetilde{I}_i^*$
1	{55,91}	{55,91}	{55,91}	91
2	{18,22,58}	{22,58,538,568}	{22,58}	58
3	{190,220}	{190,191,220,221,1858,1888,1900}	{190,220}	220
4	{16,161,191}	{161,162,191,192,1801,1829,1831,1843,1859,1871}	{161,191}	191
5	{638,668,680}	{638,666,668,680,696,708}	{638,668,680}	680
6	{16,30,608,638,650}	{608,636,638,650,666,678}	{608,638,650}	650
7	{7,18,596,626,638}	{596,624,626,638,654,666}	{596,626,638}	638

Domanda stocastica e dinamica Estensioni…

- Estensione dinamica al primo metodo di riduzione:
  - Si considerano le proposizioni alla base del metodo di filtraggio a priori dei domini e le si estende ipotizzando che una soluzione parziale sia data
    - Gli UB sulla lunghezza dei cicli di rifornimento vengono rivisti sulla base della soluzione parziale che si ha a disposizione

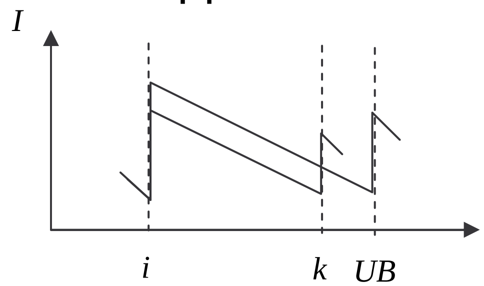
  - Esempio:
    - proposizione che stabilisce le condizioni con cui è possibile definire un upper bound sulla lunghezza di un qualsiasi ciclo di rifornimento



IP: $\delta_i = 1$

Domanda stocastica e dinamica Estensioni…

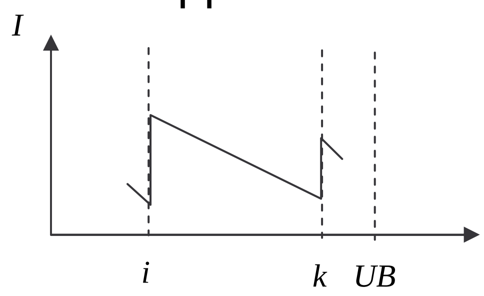
- Estensione dinamica al primo metodo di riduzione:
  - Si considerano le proposizioni alla base del metodo di filtraggio a priori dei domini e le si estende ipotizzando che una soluzione parziale sia data
    - Gli UB sulla lunghezza dei cicli di rifornimento vengono rivisti sulla base della soluzione parziale che si ha a disposizione
  - Esempio:
    - proposizione che stabilisce le condizioni con cui è possibile definire un upper bound sulla lunghezza di un qualsiasi ciclo di rifornimento



IP: $\delta_i = 1$

Domanda stocastica e dinamica Estensioni…

- Estensione dinamica al primo metodo di riduzione:
  - Si considerano le proposizioni alla base del metodo di filtraggio a priori dei domini e le si estende ipotizzando che una soluzione parziale sia data
    - Gli UB sulla lunghezza dei cicli di rifornimento vengono rivisti sulla base della soluzione parziale che si ha a disposizione
  - Esempio:
    - proposizione che stabilisce le condizioni con cui è possibile definire un upper bound sulla lunghezza di un qualsiasi ciclo di rifornimento



IP: $\delta_i = 1$

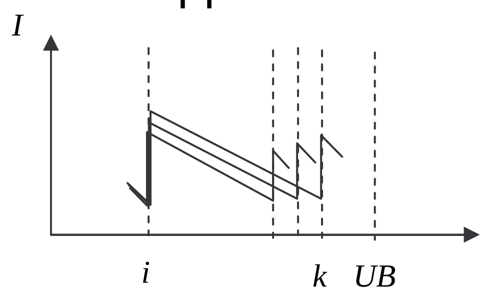
$\exists k \mid k > i \wedge k < UB$ and $\delta_k = 1$

$\Rightarrow \quad \overline{UB}$ = minimo di tali k

Domanda stocastica e dinamica Estensioni…

- Estensione dinamica al primo metodo di riduzione:
  - Si considerano le proposizioni alla base del metodo di filtraggio a priori dei domini e le si estende ipotizzando che una soluzione parziale sia data
    - Gli UB sulla lunghezza dei cicli di rifornimento vengono rivisti sulla base della soluzione parziale che si ha a disposizione

  - Esempio:
    - proposizione che stabilisce le condizioni con cui è possibile definire un upper bound sulla lunghezza di un qualsiasi ciclo di rifornimento



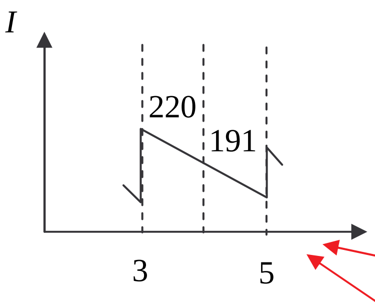
IP: $\delta_i = 1$

$\exists k \mid k > i \wedge k < UB$ and $\delta_k = 1$

$\Rightarrow$ $\overline{UB}$ = minimo di tali k

Domanda stocastica e dinamica
Estensioni…

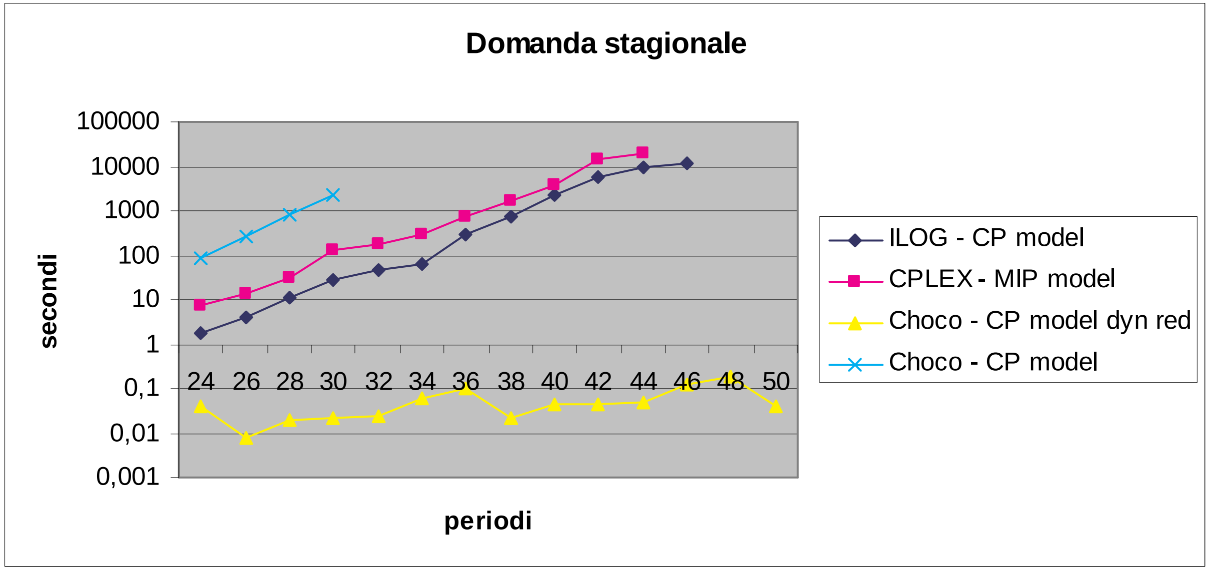
- Estensione dinamica al primo metodo di riduzione:

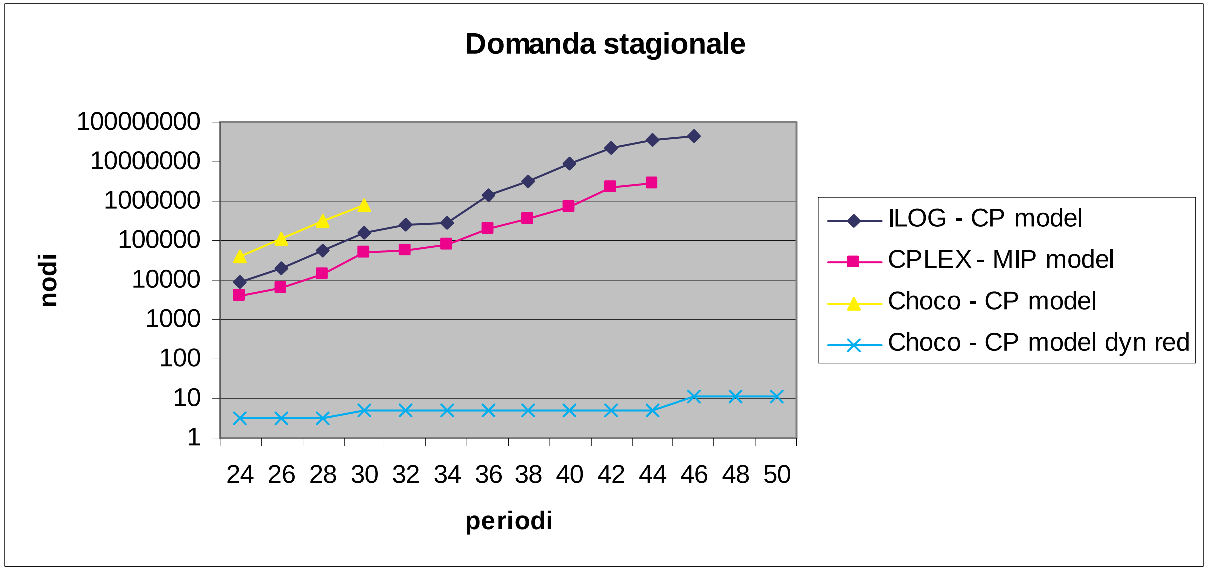


Periodo	1	2	3	4	5	6	7
$\overline{d}_t$	101	33	347	29	1163	30	12

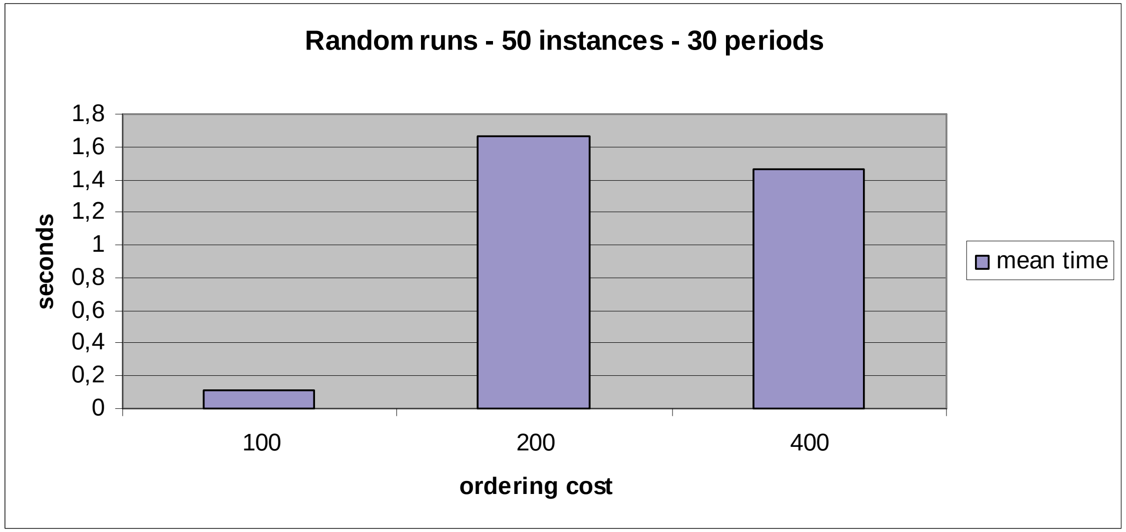
i	$I_i^{S_I}$	$I_i^{S_I}$ dinamica → {1,•,1,0,1,•,•}	$I_i^{S_I} \cap I_i^{S_{II}}$	$\tilde{I}_i^*$
1	{55,91}	I1 2 {55, 91}	{55,91}	91
2	{18,22,58}	I2 2 {22, 58}	{22,58}	58
3	{190,220}	I3 1 {220}	{190,220}	220
4	{16,161,191}	I4 1 {191}	{161,191}	191
5	{638,668,680}	I5 3 {638, 668, 680}	{638,668,680}	680
6	{16,30,608,638,650}	I6 3 {608, 638, 650}	{608,638,650}	650
7	{7,18,596,626,638}	I7 3 {596, 626, 638}	{596,626,638}	638

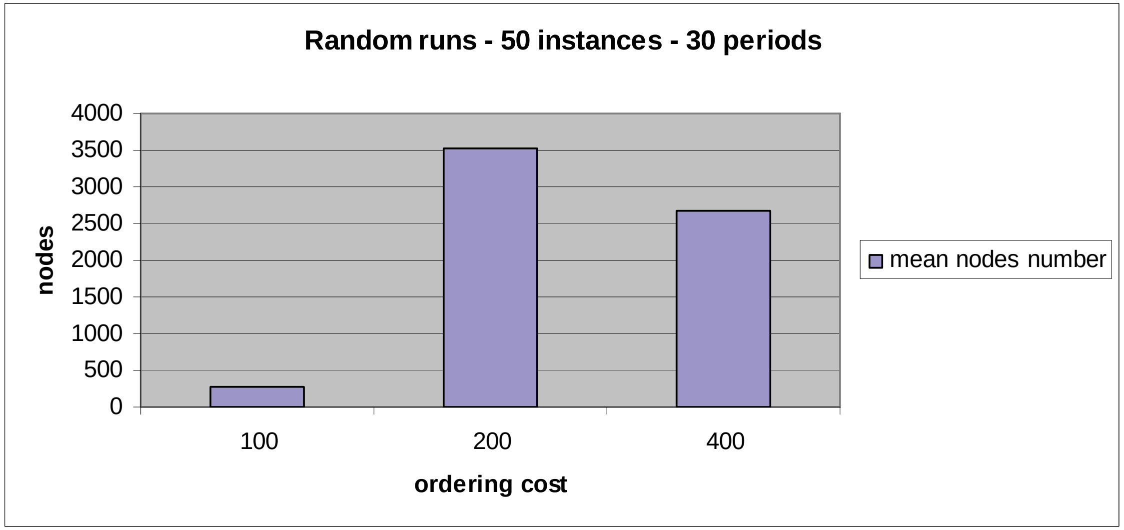
Test – Euristica *Most Constrained*





Test – Euristica *Most Constrained*





Conclusioni

- Miglioramento dello stato dell’arte per la formulazione stocastica e dinamica del problema del lotto economico
- Strategia di risoluzione in grado di trattare istanze con dimensioni significative
  - di fatto applicabile a problemi reali
- Robustezza della strategia verso variazioni nei parametri del modello

- Estensione della strategia per modelli più realistici
  - vincoli di capacità
  - merci deperibili